

目录

第一讲 降阶法	2
第二讲 求和法	15
第三讲 递推法与数学归纳法	22
第四讲 拆分法	39
第五讲 Vandermonde 行列式	48
第六讲 升阶法	55
第七讲 求根法	59
第八讲 组合定义	67
第九讲 Laplace 定理	78
第十讲 综合运用	86
参考答案	92

第一讲 降阶法

例 1.1

计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

例 1.2 爪型行列式

求下列 n 阶行列式的值，其中 $a_i \neq 0$ ($2 \leq i \leq n$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

例 1.3

计算 n 阶行列式 ($a_i \neq 0$):

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

例 1.4

计算下列 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 1.5

计算下列 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

例 1.8

设 $|A| = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式, A_{ij} 是第 (i, j) 元素的代数余子式。证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix} = |A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_i y_j.$$

练习 1

设 n 阶行列式 $|A|$ 的第 (i, j) 元素为

$$a_{ij} = \max\{i, j\}.$$

求 $|A|$ 。

练习 2

设 n 阶行列式 $|A|$ 的第 (i, j) 元素为

$$a_{ij} = |i - j|.$$

求 $|A|$ 。

练习 3(1) 白皮书例 1.14

计算行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

练习 3(2) 白皮书例 1.18

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

练习 3(3) 白皮书例 1.19

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}.$$

练习 4

用降阶法求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

练习 5

用降阶法求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

第二讲 求和法

例 1.17

设 x_1, x_2, x_3 是方程

$$x^3 + px + q = 0$$

的三个根，求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

例 1.20

设

$$b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij},$$

证明:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.18

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

例 1.19

计算下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}.$$

例 1.21

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

练习 1

设 x_1, x_2, x_3, x_4 是方程

$$x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

的四个根，求行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

的值。

练习 2

用求和法计算高代白皮书的例 1.3 ($a_i \neq 0$):

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

第三讲 递推法与数学归纳法

例 1

求三对角行列式的递推关系式（空白处均为 0）：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

记 $D_0 = 1$ 、 $D_1 = a_1$ 。

例 1.23

计算 n 阶行列式 ($bc \neq 0$):

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}.$$

例 1.24证明: n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}
 \cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 2 \cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 \cos x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos x & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \cos x
 \end{vmatrix} = \cos nx.$$

例 1.22

求下列 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & & & \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & -1 & 1-a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_n \\ & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

例 1.25

计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

例 1.16 Cauchy 行列式

计算下列 n 阶行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^{-1} & (a_1 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_1 + b_n)^{-1} \\ (a_2 + b_1)^{-1} & (a_2 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_2 + b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n + b_1)^{-1} & (a_n + b_2)^{-1} & \cdots & (a_n + b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

例 1.26

设

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}.$$

证明: $A_n = a_0 a_1 \cdots a_n$.

例 1.7

设 n ($n > 2$) 阶行列式 $|A|$ 的所有元素或为 1 或为 -1 。证明：

$$|A| \leq \frac{2}{3} n!.$$

例 1.9

设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数,

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证明:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f'_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f'_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f'_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

练习 1

令

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

证明连分数等式

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)}{(a_2 a_3 \cdots a_n)}.$$

练习 2

用递推法计算高代白皮书的例 1.2（爪型行列式）：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

练习 3

用递推法计算高代白皮书的例 1.3:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

练习 4

用递推法求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

练习 5

用递推法求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

练习 6

分别用递推法和例 1.25 求下列 n 阶行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & 0 \\ a & a & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & b & b \\ 0 & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}.$$

练习 7

用递推法求下列 n 阶行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} x-n & n & & & \\ -1 & x-n+2 & n-1 & & \\ & -2 & x-n+4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -n & x+n \end{vmatrix}.$$

练习 8

用递推法求下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ n-1 & x & 2 & & \\ & n-2 & x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 \\ & & & 1 & x \end{vmatrix}.$$

第四讲 拆分法

例 1.32

设 t 是一个参数,

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}.$$

证明:

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $|A(0)|$ 中的代数余子式。

例 1.33

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

例 1.43

设 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 是次数不超过 $n-2$ 的多项式。证明：对任意 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

例 $I + \alpha\alpha^T$

求下列 n 阶行列式的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \cdots & \alpha_1\alpha_n \\ \alpha_2\alpha_1 & 1 + \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\alpha_1 & \alpha_n\alpha_2 & \cdots & 1 + \alpha_n^2 \end{vmatrix}.$$

练习 1

用拆分法的推论计算高代白皮书的例 1.3:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

练习 2

用拆分法计算下列 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

练习 3

用拆分法和例 1.23 计算下列 n 阶行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x+x^2 & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

练习 4

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, b 为常数, 方阵

$$B = (a_{ij} + b).$$

- (1) 证明: A 的所有代数余子式之和等于 B 的所有代数余子式之和;
- (2) 进一步假设 A 是偶数阶反对称矩阵, 证明 $|A| = |B|$ 。

练习 5

设 $|A|$ 是如下 2019 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2018} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2018} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2019} & x_{2019}^2 & \cdots & x_{2019}^{2018} \end{vmatrix}.$$

设 A_{ij} 为第 (i, j) 元素的代数余子式, 求

$$\sum_{i,j=1}^{2019} (x_i^{2019} + j^{70}) A_{ij}.$$

第五讲 Vandermonde 行列式

例 1.27

计算下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 1.28

设

$$f_k(x) = x^k + \alpha_{k1}x^{k-1} + \alpha_{k2}x^{k-2} + \cdots + \alpha_{kk},$$

求下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}.$$

例 1.29

求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}.$$

例 1.30

求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}.$$

例 1.31

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$, 证明:

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0.$$

练习 1

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 n 个复数, 满足

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = r, \quad k = 1, 2, \dots, n, n+1,$$

其中 $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ 。用 Vandermonde 行列式和 Cramer 法则证明: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中有 r 个 1, $n-r$ 个 0。

练习 2

求下列 n 阶行列式的值 ($\widehat{x}_i$ 表示 x_i 不在连乘式中):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & \widehat{x}_1 x_2 \cdots x_n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_1 \widehat{x}_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \cdots \widehat{x}_n \end{vmatrix}.$$

第六讲 升阶法

例 1.34

计算下列行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

例 1.35

计算下列 n 阶行列式的值 ($1 \leq i \leq n-1$):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

例 1.36

求下列 n 阶行列式的值，其中 $a_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$):

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

练习 1

用升阶法计算下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1 - a) & x_1^2(x_1 - a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - a) \\ 1 & x_2(x_2 - a) & x_2^2(x_2 - a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n(x_n - a) & x_n^2(x_n - a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - a) \end{vmatrix}.$$

第七讲 求根法

例 Vandermonde 行列式

用求根法计算 Vandermonde 行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 1.41

求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}.$$

例 1.43

设 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 是次数不超过 $n-2$ 的多项式。证明：对任意 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

例 1.12

计算：

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}.$$

例 1.14

计算下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

例 1.15

求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

例 1.16

计算下列 n 阶 Cauchy 行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_1 + b_1)^{-1} & (a_1 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_1 + b_n)^{-1} \\ (a_2 + b_1)^{-1} & (a_2 + b_2)^{-1} & \cdots & (a_2 + b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n + b_1)^{-1} & (a_n + b_2)^{-1} & \cdots & (a_n + b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

练习 1

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是未定元,

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \geq 1), \quad S_0 = n.$$

用求根法求下列行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

第八讲 组合定义

例 1.10

若 n 阶行列式 $|A|$ 中零元素的个数超过 $n^2 - n$ 个，证明： $|A| = 0$ 。

例 1.9

设 $f_{ij}(t)$ 是可微函数,

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证明:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f'_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f'_{2j}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f'_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

例 1.11

设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明： $f(x)$ 是最高次项系数为 1 的 n 次多项式，且其 $n - 1$ 次项系数等于 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ 。

例 1

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵, 证明:

$$\overline{|A|} = |\overline{A}|.$$

例 2

设 $A = (a_{ij})$ 是 n ($n \geq 2$) 阶非异整数方阵, 满足对任意的 i, j , $|A|$ 均可整除 a_{ij} 。证明:

$$|A| = \pm 1.$$

例 反对称行列式

如果 n 阶行列式 $|A|$ 的元素满足

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

则称为反对称行列式。用组合定义证明：奇数阶反对称行列式的值等于零。

练习 1

设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行、每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1。求

$$\sum_{A \in \Gamma} |A|.$$

练习 2

对 n 阶行列式 $|A|$ 的组合定义中的每一项

$$(-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}, \quad (k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n,$$

若其取值为正，称其为正项；若为负，称其为负项。求下列行列式的展开式中有多少项为正项：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

练习 3

设 n 阶行列式

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k-1} & 1 & x_{k+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{k-1}^2 & 2x_k & x_{k+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_{k-1}^3 & 3x_k^2 & x_{k+1}^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{k-1}^{n-1} & (n-1)x_k^{n-2} & x_{k+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $1 \leq k \leq n$ 。求

$$\sum_{k=1}^n D_k.$$

练习 4

计算下列 $n+1$ 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

练习 5

设 $|A|$ 为 n 阶行列式，其中 n 为奇数，且 $|A|$ 的所有元素都是整数。证明：若对任意的 $1 \leq i \leq n$ ， a_{ii} 都是偶数，且对任意的 $1 \leq i < j \leq n$ ， $a_{ij} + a_{ji}$ 都是偶数，则 $|A|$ 也是偶数。

第九讲 Laplace 定理

例 1.37

利用行列式的 Laplace 定理证明恒等式：

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

例 1.38

求 $2n$ 阶行列式的值：主对角线上元素全为 a ，副对角线上元素全为 b ，其余元素全为 0。

例 1.39

设 A, B 都是 n 阶方阵, 证明:

$$|A + B| = |A| + |B| + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

这里 $A \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix}$ 表示相应子式。

例 1

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, x 为未定元,

$$f(x) = |xI_n - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

其中

$$\alpha_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

例 1.36

求下列 n 阶行列式的值，其中 $a_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$):

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_{n-1} & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_{n-1} & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & \cdots & 0 & a_{n-1} + a_n \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & a_n + a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

练习 1

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 求下列 mn 阶行列式的值, 其中 A 的每一行各重复 m 次:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

练习 2

用 Laplace 定理计算高代白皮书的例 1.3:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

练习 3

用 Laplace 定理计算下列 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 + c_1 y_1 & 1 + c_1 y_2 & \cdots & 1 + c_1 y_n \\ 1 + c_2 y_1 & 1 + c_2 y_2 & \cdots & 1 + c_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + c_n y_1 & 1 + c_n y_2 & \cdots & 1 + c_n y_n \end{vmatrix}.$$

第十讲 综合运用

例 1.15

求下列行列式的值：

$$|A| = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}.$$

例 1.44

计算下列 n 阶行列式的值:

$$|A| = \begin{vmatrix} (x - a_1)^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x - a_2)^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & (x - a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

例 1.34

计算下列行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

例 1.45

设 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$, A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} - a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} - a_{1n} & 1 \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} - a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} - a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n2} & a_{n2} - a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} - a_{nn} & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

例 1.42

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射, 使得对任意方阵 A 、任意 $1 \leq j \leq n$ 和任意常数 c , 均满足:

- (1) 若 A 的第 j 列是 B, C 的第 j 列之和, 而其余列对应相同, 则 $f(A) = f(B) + f(C)$;
- (2) 将 A 的第 j 列乘以 c 得 B , 则 $f(B) = cf(A)$;
- (3) 对换 A 的任意两列得 B , 则 $f(B) = -f(A)$;
- (4) $f(I_n) = 1$ 。

证明: $f(A) = |A|$ 。

练习 1

设 $n \geq 2$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-2 \\ 1 & 5 & 9 & \cdots & 4n-3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $|A|$ 的第 (i, j) 元素的代数余子式。用行列式性质和例 1.32 两种方法证明:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

参考答案

以下只列非证明题的最终结果。

第一讲 降阶法

例 1.1 $|A| = n!$ 。

例 1.2 $|A| = \prod_{i=1}^n a_i \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_1 a_i} \right)$ 。

例 1.3 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$ 。

例 1.4 $|A| = 1$ 。

例 1.5 $|A| = a^n - a^{n-2}$ 。

练习 1 $|A| = (-1)^{n-1} n$ 。

练习 2 $|A| = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$ 。

练习 3(1) $|A| = x^2 y^2$ 。

练习 3(2) $|A| = (-1)^{n-1} (n-1)$ 。

练习 3(3) $|A| = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right)$ 。

练习 4 记

$$B = \prod_{i=2}^n b_i, \quad |A| = B \left[a_1 + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \frac{a_j c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}{b_2 b_3 \cdots b_j} \right].$$

练习 5 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i)$ 。

第二讲 求和法

例 1.17 $|A| = 0$ 。

例 1.18 $|A| = (-1)^{n-1}(n-1)$ 。

例 1.19 $|A| = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right)$ 。

例 1.21 $|A| = (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$ 。

练习 1 行列式的值为 0。

练习 2 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$ 。

第三讲 递推法与数学归纳法

例 1 $D_0 = 1, D_1 = a_1$, 且

$$D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

例 1.23 令 α, β 是 $t^2 - at + bc = 0$ 的两根。若 $\alpha \neq \beta$, 则

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若 $\alpha = \beta$, 则 $D_n = (n+1)(a/2)^n$ 。

例 1.22 $|A| = 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ 。

例 1.25 记 $P_y = \prod_{i=1}^n (x_i - y)$, $P_z = \prod_{i=1}^n (x_i - z)$ 。若 $y \neq z$, 则

$$D_n = \frac{z P_y - y P_z}{z - y};$$

若 $y = z$, 则

$$D_n = P_y + y \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_j - y).$$

例 1.16 $|A| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$ 。

练习 2 $|A| = \prod_{i=1}^n a_i \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_1 a_i} \right)$ 。

练习 3 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$ 。

练习 4 记 $B = \prod_{i=2}^n b_i$, 则

$$|A| = B \left[a_1 + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \frac{a_j c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}{b_2 b_3 \cdots b_j} \right].$$

练习 5 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i)$ 。

练习 6 $|A| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} ab \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ 。

练习 7 $|A| = (x-1)^n$ 。

练习 8 $|A| = \prod_{k=0}^{n-1} (x + n - 1 - 2k)$ 。

第四讲 拆分法

例 1.33 若 $b \neq c$, 则

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c};$$

若 $b = c$, 则 $|A| = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$ 。

例 $I + \alpha\alpha^T \quad D_n = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ 。

练习 1 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$ 。

练习 2 $|A| = 1 + \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 。

练习 3 当 $x^2 \neq 1$ 时,

$$|A| = \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} + x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

右端按多项式恒等式理解其在 $x^2 = 1$ 时的取值。

练习 5 记 $V = (x_i^j)_{0 \leq j \leq 2018}$, 则答案为

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq 2019} (x_j - x_i) \right) \left(2 - \prod_{i=1}^{2019} (1 - x_i) \right).$$

第五讲 Vandermonde 行列式

例 1.27 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)。$

例 1.28 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)。$

例 1.29 $|A| = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i)。$

例 1.30 $|A| = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i)。$

练习 2 $|A| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}{\prod_{i=1}^n x_i}。$

第六讲 升阶法

例 1.34 记 $W = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$, 则

$$|A| = \det(W) (1 + \mathbf{1}^\top W^{-1} \mathbf{1}).$$

例 1.35 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{n-i} \leq n} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{n-i}}.$

例 1.36 记 $S = \sum_{i=1}^n a_i$, $T = \sum_{i=1}^n a_i^{-1}$, 则

$$|A| = (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) ((n-2)^2 - ST).$$

练习 1 左端行列式经 $C_j \leftarrow C_j + aC_{j-1}$ ($j = 2, \dots, n$) 化为

$$\det(1, x_i^2, x_i^3, \dots, x_i^n)_{1 \leq i \leq n} = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right) e_{n-1}(x_1, \dots, x_n),$$

其中 e_{n-1} 是 $n-1$ 次基本对称多项式。

第七讲 求根法

例 Vandermonde 行列式 $D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ 。

例 1.41 $|A| = -3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ 。

例 1.12 $|A| = (x + y + z + w)(x + y - z - w)(x - y + z - w)(x - y - z + w)$ 。

例 1.14 $|A| = x^2 y^2$ 。

例 1.15 $|A| = 2abc(a + b + c)^3$ 。

例 1.16 $|A| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$ 。

练习 1 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2$ 。

第八讲 组合定义

练习 1 $\sum_{A \in \Gamma} |A| = 0$ 。

练习 2 正项的个数为

$$\frac{n! + 2^{n-1}}{2}.$$

练习 3 $\sum_{k=1}^n D_k = 0$ 。

练习 4 记 $e_s(a_1, \dots, a_n)$ 为 s 次基本对称多项式, 则

$$|A| = - \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) \left[n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)e_s \right].$$

第九讲 Laplace 定理

例 1.38 原行列式的值为 $(a^2 - b^2)^n$ 。

例 1.36 记 $S = \sum_{i=1}^n a_i$, $T = \sum_{i=1}^n a_i^{-1}$, 则

$$|A| = (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) ((n-2)^2 - ST).$$

练习 1 当 $m \geq 2$ 时, mn 阶行列式等于 0。

练习 2 $|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$ 。

练习 3 $|A| = 1 + \sum_{i=1}^n c_i y_i$ 。

第十讲 综合运用

例 1.15 $|A| = 2abc(a+b+c)^3$ 。

例 1.44 记 $P_i = (x^2 - 2a_i x)$, 则

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_i^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} P_j + \prod_{j=1}^n P_j.$$

例 1.34 记 $W = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$, 则

$$|A| = \det(W) (1 + \mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1}).$$