

数学分析

上册

第二章 极限

课后习题册

依据南开大学数学科学学院教材整理

2026 年 10 月

练习 2.1

第 1 题

按定义证明下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{2n^2 - 3} = \frac{3}{2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0;$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1;$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0 \quad (0 < \alpha < 1)。$$

练习 2.1**第 2 题**

按定义证明下列各数列发散：

(1) $\{n^{(-1)^n}\};$

(2) $\{\sin n\}.$

练习 2.2

第 1 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ 。证明存在正整数 N ，使当 $n > N$ 时，就有

$$|x_n| > \frac{|a|}{2}.$$

练习 2.2**第 2 题**

设数列 $\{x_n\}$ 收敛而数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n + y_n\}$ 和 $\{x_n y_n\}$ 有怎样的敛散性？

练习 2.2

第 3 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n^3};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}\right) \quad (a > 1).$$

练习 2.3

第 1 题

证明下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s}{a^n} = 0 \quad (a > 1, s \in \mathbb{R});$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^s} = 0 \quad (a > 0, a \neq 1, s > 0)。$$

练习 2.3

第 2 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log_2 n \cdot \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \cdot \cos n \right];$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[n^{1+\frac{1}{n}} \right]}{n}.$$

练习 2.3

第 3 题

利用单调收敛定理判定数列 $\{x_n\}$ 的收敛性, 其中

(1) $x_1 = \sqrt{2}, \dots, x_n = \sqrt{2x_{n-1}}, \dots;$

(2) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$

练习 2.4

第 1 题

按定义证明下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0 \quad (0 < q < 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \log_a x = 0 \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x^2-3} = \frac{3}{5};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{6}{7};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x_0};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}.$$

练习 2.4

第 2 题

求下列各函数在给定点 x_0 的左、右极限:

(1) $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$, $x_0 = \frac{1}{n}$, 其中 n 是大于 1 的整数;

(2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+2) - x^{2n} \sin x}{x^{2n} + 1} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $x_0 = 1$ 。

练习 2.4

第 3 题

写出下列各式的分析定义：

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq A;$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq A。$

练习 2.5

第 1 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

练习 2.6

第 1 题

证明下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^s}{a^x} = 0 \quad (a > 1, s > 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^s} = 0 \quad (a > 0, a \neq 1, s > 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^s \log_a x = 0 \quad (a > 0, a \neq 1, s > 0)。$$

练习 2.6

第 2 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1});$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}.$$

练习 2.6

第 3 题

对于下列各极限，叙述并证明归结原则：

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A;$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A。$

练习 2.6

第 4 题

对于下列各极限，给出柯西收敛原理：

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

练习 2.7

第 1 题

按定义证明下列各数列为无穷大量：

(1) $\left\{ \frac{n^2 - 3}{2n + 1} \right\};$

(2) $\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\}.$

练习 2.7

第 2 题

写出下列各式的分析定义：

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq +\infty$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq +\infty$ 。

练习 2.7

第 3 题

按定义证明下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - 1} = -\infty;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \cot \frac{1}{x} = \infty.$$

练习 2.7

第 4 题

对于下列各极限，叙述并证明归结原则：

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 。

练习 2.7

第 5 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + \sin^2 x) - x}{\ln(e^{2x} + \arcsin^2 x) - 2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan(\frac{\pi}{4} + ax)}{\sin bx} \quad (b \neq 0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \quad (\alpha \neq 0);$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \ln x.$$

习题 2 (A 组)

第 1 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = a < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。

习题 2 (A 组)

第 2 题

设 $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

习题 2 (A 组)

第 3 题

设 $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\}$ 收敛, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

习题 2 (A 组)

第 4 题

设 $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a.$$

举例说明逆命题不真。

习题 2 (A 组)

第 5 题

设 $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a.$$

举例说明逆命题不真。

习题 2 (A 组)

第 6 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1) = ab.$$

习题 2 (A 组)

第 7 题

设 $\{a_n\}$ 是单调数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

习题 2 (A 组)

第 8 题

设 x_1 和 y_1 都是正数,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限都存在且相等。

习题 2 (A 组)

第 9 题

设 $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, $n = 1, 2, \dots$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

习题 2 (A 组)

第 10 题

给定数列 $\{a_n\}$, 记

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|, \quad n = 2, 3, \dots$$

证明: 若数列 $\{A_n\}$ 有界, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

习题 2 (A 组)

第 11 题

设

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \alpha |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中常数 $\alpha \in (0, 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

习题 2 (A 组)

第 12 题

设 $0 \leq x \leq 1$, 令

$$x_1 = \frac{x}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{x}{2} - \frac{x_n^2}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

习题 2 (A 组)

第 13 题

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 定义如下:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(2) 斐波那契 (Fibonacci) 数列 $\{F_n\}$ 定义如下:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

习题 2 (A 组)

第 14 题

证明对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0,$$

其中 $R(x)$ 是黎曼函数。

习题 2 (A 组)

第 15 题

设 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中有定义, 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中任何严格递减的、以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

习题 2 (A 组)

第 16 题

证明如果存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a \sin x + b \cos x),$$

则必有 $a = b = 0$ 。

习题 2 (A 组)

第 17 题

设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$ 。

习题 2 (A 组)

第 18 题

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 且对任何 $x > 0$, 都有 $f(2x) = f(x)$, 证明 $f(x) \equiv A$ 。

习题 2 (A 组)

第 19 题

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 在 $x = 0$ 的某邻域内有界, $a > 1$, $b > 1$, 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(ax) = bf(x)$ 。证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

习题 2 (A 组)

第 20 题

设函数 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的严格单调函数，又设对 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ ，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

习题 2 (A 组)

第 21 题

设 $f(x)$ 在 (a, b) 递增, 证明对任意 $x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在 x_0 处有左、右极限, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

习题 2 (A 组)

第 22 题

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调且恒大于 0, 并满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1,$$

证明对任意 $a > 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$ 。

习题 2 (A 组)

第 23 题

设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 递增, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 。证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 。

习题 2 (A 组)

第 24 题

设函数 $f(x)$ 是从 $[a, b]$ 到 $[a, b]$ 的映射, 且存在常数 $\alpha \in (0, 1)$, 使得对任何 $x, y \in [a, b]$, 都有 $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ 。证明存在唯一的 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

习题 2 (A 组)

第 25 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = +\infty.$$

举例说明逆命题不真。

习题 2 (A 组)

第 26 题

证明施笃兹 (Stolz) 定理。设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个数列, 满足下列条件:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A$ (其中 $A \in \mathbb{R}$ 或 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$);

(2) 数列 $\{y_n\}$ 严格递增且趋向 $+\infty$,

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$ 。

习题 2 (A 组)

第 27 题

设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1.$$

习题 2 (B 组)

第 1 题

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0.$$

习题 2 (B 组)

第 2 题

设 $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 证明存在无限多个下标 n , 使对所有 $k \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n > x_{n+k}$ 。

习题 2 (B 组)

第 3 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k a_k}{2^n} = a.$$

习题 2 (B 组)

第 4 题

设数列 $\{x_n\}$ 有上界, 且

$$x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

习题 2 (B 组)

第 5 题

设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 满足对任意 $x, y \in [a, b]$, 当 $x \neq y$ 时有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

任取 $x_1 \in [a, b]$, 令

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

习题 2 (B 组)

第 6 题

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

习题 2 (B 组)

第 7 题

证明

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}.$$

习题 2 (B 组)

第 8 题

证明 e 是无理数。

习题 2 (B 组)

第 9 题

证明对任意正整数 n , 有

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

习题 2 (B 组)

第 10 题

设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

注 此数列的极限值记为 γ , 称为欧拉 (Euler) 常数, 且 $\gamma = 0.577\,215\,664\,9\cdots$ 。

习题 2 (B 组)

第 11 题

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!).$$

习题 2 (B 组)

第 12 题

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n-1}) = 0,$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

习题 2 (B 组)

第 13 题

设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = 1,$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3n} x_n = 1.$$

习题 2 (B 组)

第 14 题

设 $c \in \mathbb{R}$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 讨论在 c 的不同取值下 $\{a_n\}$ 的敛散性。

习题 2 (B 组)

第 15 题

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义, 且对任何 $\lambda \in (0, 1)$, 都有 $f(n\lambda) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。问是否必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0?$$

习题 2 (B 组)

第 16 题

设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 0,$$

证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

习题 2 (B 组)

第 17 题

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0,$$

证明在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 $f(x) \equiv g(x)$ 。

参考答案

原书附录 B 只给出部分习题的参考结果。以下完整收录其中与第二章对应的内容; 未列出的题目在原书附录中没有答案。

练习 2.2 3. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $-\frac{1}{4}$; (4) $\frac{1-b}{1-a}$; (5) $\frac{1}{2}$; (6) $\frac{a}{(a-1)^2}$ 。

练习 2.3 2. (1) 0; (2) $\frac{3}{2}$; (3) 1; (4) 0; (5) 1。

练习 2.4 2. (1) 左极限为 0, 右极限为 1; (2) 左极限为 $\ln 3$, 右极限为 $-\sin 1$ 。

练习 2.5 1. (1) $\frac{m}{n}$; (2) $\frac{n}{m}$; (3) -2 ; (4) $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$; (5) $\frac{3}{2}$; (6) $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$ 。

练习 2.6 2. (1) 1; (2) 0; (3)
$$\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

练习 2.7 5. (1) $\log_a e$; (2) $\ln a$; (3) $a^a \ln \frac{a}{e}$; (4) 1; (5) $\frac{2a}{b}$; (6) α ; (7) 0; (8) 0。

习题 2 (A 组) 2. $\frac{a+2b}{3}$; 12. $\sqrt{1+x} - 1$ 。

习题 2 (B 组) 11. 2π 。