

数学分析

上册

第三章 连续函数

课后习题册

依据南开大学数学科学学院教材整理

2026 年 10 月

练习 3.1

第 1 题

判定下列各函数在给定点 x_0 的连续性:

(1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

练习 3.1**第 2 题**

设对所有 $x \in [-1, 1]$, 均有 $|f(x)| \leq |x|$ 。证明 $f(x)$ 在点 0 连续。

练习 3.1

第 3 题

求作定义域为 $\mathbb{R}$ 且满足下列条件的各函数:

- (1) 函数 $f(x)$ 只在点 $x = a$ 连续而在其余点都不连续;
- (2) 函数 $f(x)$ 只在点 $x = a$ 和 $x = b$ 连续而在其余点都不连续;
- (3) 函数 $f(x)$ 在所有点都不连续, 但 $|f(x)|$ 在所有点都连续;
- (4) 函数 $f(x)$ 在点

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

间断而在其余点都连续;

- (5) 函数 $f(x)$ 在点

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

和 0 间断而在其余点都连续;

- (6) 函数 $f(x)$ 在点

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

有第二类间断点而在其余点都连续。

练习 3.2

第 1 题

判定函数 $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 是否必不连续, 并说明理由。

- (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续而函数 $g(x)$ 在点 x_0 不连续;
- (2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续;
- (3) 函数 $f(x)$ 以 x_0 为第一类间断点, 而函数 $g(x)$ 以 x_0 为第二类间断点。

练习 3.2

第 2 题

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续，令

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 I 上连续。

练习 3.3

第 1 题

求下列各函数的间断点并指出间断点的类型:

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$

(2) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right);$

(3)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数;} \end{cases}$$

(4)

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1. \end{cases}$$

练习 3.3

第 2 题

求下列各极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[n]{(x + \alpha_1) \cdots (x + \alpha_n)} - x \right];$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(a + x) - \arctan a}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \quad (a \text{ 不是 } \pi \text{ 的整数倍});$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2a^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^x \quad (a > 0);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^x - 1}{(a - 1)x} \right]^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

练习 3.4

第 1 题

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且对任何 $x \in [a, b]$ ，都存在 $y \in [a, b]$ ，使得

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明存在点 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $f(\xi) = 0$ 。

练习 3.4

第 2 题

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A < B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

证明对任意 $\eta \in (A, B)$, 存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = \eta$ 。

练习 3.4

第 3 题

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 。证明存在点 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

习题 3 (A 组)

第 1 题

设 $f(x)$ 在 (a, b) 有定义且没有第二类间断点, 对于任意 $x, y \in (a, b)$, 都有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

证明 $f(x)$ 在 (a, b) 连续。

习题 3 (A 组)

第 2 题

设 $[a, b]$ 上的单调函数 $f(x)$ 可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的所有值，证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续。

习题 3 (A 组)

第 3 题

设函数 $f(x)$ 在点 0 连续, 且对任何 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。证明:

- (1) $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数;
- (2) 存在常数 a , 使得 $f(x) = ax$ 。

习题 3 (A 组)

第 4 题

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续, 且对任何 $x > 0$, 都有 $f(x^2) = f(x)$ 。证明 $f(x)$ 恒等于常数。

习题 3 (A 组)

第 5 题

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对任意 $x \in [a, b]$, 令

$$m(x) = \min\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}, \quad M(x) = \max\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}.$$

证明 $m(x), M(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续。

习题 3 (A 组)

第 6 题

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $f(x) \in [a, b]$ 。证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

习题 3 (A 组)

第 7 题

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$ 。证明对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 都存在一个 $x_n \in [0, 1]$, 使得

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

习题 3 (A 组)

第 8 题

设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续周期函数。证明存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使得

$$f(\xi + 1) = f(\xi).$$

习题 3 (A 组)

第 9 题

是否存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$, 使对任何 $c \in \mathbb{R}$:

- (1) 方程 $f(x) = c$ 都恰有两个解?
- (2) 方程 $f(x) = c$ 都恰有三个解?

习题 3 (A 组)

第 10 题

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < +\infty.$$

证明:

- (1) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界;
- (2) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上至少存在最大值、最小值中的一个。

习题 3 (B 组)

第 1 题

设 $f(x)$ 在区间 I 上的间断点都是可去间断点，令

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t), \quad x \in I.$$

证明 $g(x)$ 在区间 I 上连续。

习题 3 (B 组)

第 2 题

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且无上界, 对于任意的 $(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$, $f(x)$ 在 (α, β) 不取最小值。证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格递增。

习题 3 (B 组)

第 3 题

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

点 a 是 $f(x)$ 的一个最小值点, $f(a) < a$ 。证明 $f(f(x))$ 至少在两点取得最小值。

习题 3 (B 组)

第 4 题

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 对每个 $x \in [0, 1]$, 都有 $f(f(x)) = x$ 。证明对每个 $x \in [0, 1]$, 都有 $f(x) = x$ 。

习题 3 (B 组)

第 5 题

是否存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ ，它在有理数点上取值为无理数，在无理数点上取值为有理数？

习题 3 (B 组)

第 6 题

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且有界, $c > 0$ 。证明存在数列 $\{x_n\}$ 趋向 $+\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + c) - f(x_n)] = 0.$$

习题 3 (B 组)

第 7 题

设 n 是一个自然数, $f(x)$ 在 $[0, n]$ 上连续, 且 $f(0) = f(n)$ 。证明至少有 n 对不同的 (x, y) , 使得 $x - y$ 为正整数, 且 $f(x) = f(y)$ 。

参考答案

原书附录 B 对第三章只给出了练习 3.3 第 2 题的参考结果。以下完整收录这些结果；其余题目未出现在原书参考答案中。

练习 3.3 2. (1) $\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}$; (2) $\sec^2 a$; (3) $\frac{1}{1+a^2}$; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $e^{\cot a}$; (6) e ;
(7) $\sqrt[3]{abc}$; (8) a^2 ; (9) $\begin{cases} a, & a > 1, \\ 1, & 0 < a < 1, \end{cases}$; (10) $\frac{7}{36}^\circ$.