

数学分析第二章极限

习题 2 (A 组) 第 14、19、20 题解答

对应习题册第 35、40、41 页

说明 本文按大一数学分析中数列极限、函数极限的 ε - δ 与 ε - N 定义, 以及单调性、局部有界性等基本性质给出完整证明。以下题号和条件均与指定页面一致。

第 14 题: 黎曼函数在任意点的极限

————— 原题 —————

题目 证明对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0,$$

其中 $R(x)$ 是黎曼函数。即当 $x = p/q$ 为既约分数且 $q > 0$ 时, $R(x) = 1/q$; 当 x 为无理数时, $R(x) = 0$ 。

证明

任取 $\varepsilon > 0$ 。取正整数 N , 使得

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

记

$$E_N = \left\{ x \in [x_0 - 1, x_0 + 1] : x = \frac{p}{q} \text{ 为既约分数, 且 } 1 \leq q \leq N \right\}.$$

这是有限集合: 每个不超过 N 的正整数分母只对应有限个位于该区间内的分数。

若 $E_N \setminus \{x_0\}$ 为空, 令 $\delta = 1$; 否则令

$$\delta = \min \left(1, \min_{r \in E_N, r \neq x_0} |r - x_0| \right).$$

由于集合有限且其中的点与 x_0 的距离为正, 所以 $\delta > 0$ 。

现设 $0 < |x - x_0| < \delta$ 。若 x 为无理数, 则 $R(x) = 0$ 。若 $x = p/q$ 为既约分数, 则因 $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, 由 δ 的构造可知 $x \notin E_N$ 。又 $x \neq x_0$, 所以必有 $q > N$ 。于是

$$0 \leq R(x) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

由函数极限的定义,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0}.$$

这里使用的是去心邻域, 所以 $R(x_0)$ 的取值不影响极限值。

第 19 题: 有界性与伸缩函数方程

————— 原题 —————

题目 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在 $x = 0$ 的某邻域内有界; 又设 $a > 1$, $b > 1$, 且对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$f(ax) = bf(x).$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

证明

由局部有界性, 存在 $\delta_0 > 0$ 和 $M > 0$, 使得

$$|t| < \delta_0 \implies |f(t)| \leq M.$$

另一方面, 对函数方程反复使用 n 次, 得

$$f(a^n x) = b^n f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

下面用归纳法说明。当 $n = 1$ 时正是题设。若 $f(a^k x) = b^k f(x)$, 则

$$f(a^{k+1} x) = f(a(a^k x)) = b f(a^k x) = b^{k+1} f(x).$$

故等式对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

任取 $\varepsilon > 0$ 。因为 $b > 1$, 所以 $b^n \rightarrow +\infty$ 。由阿基米德性质, 存在正整数 N , 使得

$$\frac{M}{b^N} < \varepsilon.$$

令

$$\delta = \frac{\delta_0}{a^N}.$$

若 $0 < |x| < \delta$, 则

$$|a^N x| = a^N |x| < a^N \delta = \delta_0.$$

因此由局部界 M 得

$$|f(x)| = \frac{|f(a^N x)|}{b^N} \leq \frac{M}{b^N} < \varepsilon.$$

于是

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}.$$

证明中只使用了函数方程、迭代关系与 0 点附近的局部有界性, 并未假设 f 连续。

第 20 题: 由函数值极限反推数列极限

————— 原题 —————

题目 设函数 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的严格单调函数, 又设数列 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

证明

由 $\{x_n\} \subseteq [a, b]$, 对每个 n 都有 $x_n - a \geq 0$, 所以只需证明充分大的 n 满足 $x_n < a + \varepsilon$ 。

任取 $\varepsilon > 0$ 。若 $\varepsilon \geq b - a$, 则

$$0 \leq x_n - a \leq b - a \leq \varepsilon,$$

结论立即成立。以下设 $0 < \varepsilon < b - a$, 于是 $a + \varepsilon \in (a, b)$ 。

情形一: f 严格递增。 由严格递增性,

$$x_n \geq a + \varepsilon \implies f(x_n) \geq f(a + \varepsilon) > f(a).$$

记

$$c = f(a + \varepsilon) - f(a) > 0.$$

因为 $f(x_n) \rightarrow f(a)$, 所以存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时,

$$|f(x_n) - f(a)| < c.$$

于是当 $n > N_1$ 时不可能有 $x_n \geq a + \varepsilon$, 否则会推出 $|f(x_n) - f(a)| \geq c$, 矛盾。因此

$$a \leq x_n < a + \varepsilon \quad (n > N_1).$$

情形二: f 严格递减。 同理, 由严格递减性,

$$x_n \geq a + \varepsilon \implies f(x_n) \leq f(a + \varepsilon) < f(a).$$

仍记 $c = f(a) - f(a + \varepsilon) > 0$ 。由 $f(x_n) \rightarrow f(a)$, 存在正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时,

$$|f(x_n) - f(a)| < c.$$

所以当 $n > N_2$ 时也不能有 $x_n \geq a + \varepsilon$, 从而

$$a \leq x_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2).$$

综合两种情形, 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 N , 当 $n > N$ 时,

$$0 \leq x_n - a < \varepsilon.$$

因此

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a}.$$