

数学分析（上册） 第二章 极限

课后习题参考答案

依据习题册《第二章 极限》整理 · 2026 年 10 月

解法范围限定：只用数列与函数的极限、施笃兹定理、单调收敛原理、柯西准则、闭区间上的连续函数性质及必要的代数不等式。全篇不使用导数、泰勒展开或级数收敛判别法。

阅读说明

为便于核对, 解答按原册顺序编号。每个题目先简述所用思路, 再给出证明或计算。极限记号 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 按双侧无穷理解, 即 $|x| \rightarrow +\infty$; 若原题另有单侧要求, 均已保留。

常用的事实包括: 夹逼原理; 收敛数列必有界; 单调有界数列收敛; 有限覆盖或闭区间上的连续函数相关性; $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u / u = 1$ 、 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$ 、 $\lim_{u \rightarrow 0} \ln(1+u)/u = 1$ 以及 $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{1/a} = 1$ 。这些均由前两章中的极限定理推出。

练习 2.1

第 1 题

思路 严格按照 $\varepsilon - N$ 定义处理; 含根式、指数和幂函数的部分, 先用初等不等式把误差控制到只含 $1/n$ 、 $n^{-1/2}$ 或积分的量。

以下均设 $\varepsilon > 0$; 当 $\varepsilon \geq 1$ 或等式中对应的误差显然小于 ε 时, 只取足够大的 N 即可。

(1) 当 $n \geq 2$ 时,

$$\left| \frac{3n^2 + 2n + 1}{2n^2 - 3} - \frac{3}{2} \right| = \frac{4n + 11}{2(2n^2 - 3)} \leq \frac{4n + 11}{n^2} \leq \frac{15}{n}.$$

故取 $N > \max\{2, 15/\varepsilon\}$ 。当 $n > N$ 时, 上式小于 ε , 所以极限为 $3/2$ 。

(2) 设 $0 < \varepsilon < 1$ 。由对数单调性,

$$\left| 2^{-1/\sqrt{n}} - 1 \right| < \varepsilon \iff n > \left(\frac{1}{\log_2(1/(1-\varepsilon))} \right)^2.$$

故取 N 大于右边即可, 极限为 1。

(3) 设 $0 < \varepsilon < \pi/2$ 。函数 $\tan t$ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上严格递增, 故

$$n > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \implies \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctan n < \frac{\pi}{2}.$$

于是按定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \pi/2$ 。

(4) 对 $n \geq 2$, 在 $n!$ 的后 $[n/2]$ 个因数中有至少 $n/2$ 个不小于 $n/2$, 故

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}, \quad 0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

只需取 $n > 2/\varepsilon^2$, 极限为 0。

(5) 令 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ($n \geq 2$)。由二项式定理,

$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n + \binom{n}{2} h_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

所以 $0 < h_n \leq \sqrt{2/(n-1)} \rightarrow 0$, 从而 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ 。

(6) 由 $n > 0$ 及二项式展开,

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^{2k}} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \frac{e}{n}.$$

由夹逼原理, 极限为 1。

(7) 对 $0 < \alpha < 1$ 和 $t \geq 0$, 函数 u^α 的凹性给出 $(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t$ 。于是

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] \leq \alpha n^{\alpha-1} \rightarrow 0.$$

极限为 0。

第 2 题

思路 每一小题各取两个具有不同极限的子列；由“收敛数列的子列同收敛于原极限”导出矛盾。

(1) 设 $A_n = n^{(-1)^n}$ 。偶子列 $A_{2k} = 2k \rightarrow +\infty$, 奇子列 $A_{2k-1} = 1/(2k-1) \rightarrow 0$ 。若原数列收敛, 则两子列应有共同极限, 矛盾。因此 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散。

(2) 若 $\sin n$ 收敛, 则 $\sin(n+2) - \sin n \rightarrow 0$ 。由和差化积,

$$\sin(n+2) - \sin n = 2 \cos(n+1) \sin 1,$$

故 $\cos n \rightarrow 0$ 。但已假定 $\sin n \rightarrow L$, 于是

$$\sin(n+2) = \sin n \cos 2 + \cos n \sin 2 \rightarrow L \cos 2.$$

子列 $\{\sin(n+2)\}$ 也应收敛到 L , 所以 $L(1 - \cos 2) = 0$, 从而 $L = 0$ 。于是 $\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0$, 与恒等于 1 矛盾。故 $\{\sin n\}$ 发散。

练习 2.2

第 1 题

因 $x_n \rightarrow a$ 且 $a \neq 0$, 取 $\varepsilon_0 = |a|/2$. 存在 N , 使 $n > N$ 时 $|x_n - a| < |a|/2$. 由反向三角不等式,

$$|x_n| \geq |a| - |x_n - a| > \frac{|a|}{2}.$$

第 2 题

和 $x_n + y_n$ 必定发散. 否则若 $x_n + y_n$ 收敛, 则

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n$$

将收敛, 矛盾.

积 $x_n y_n$ 的敛散性不能确定:

- 取 $x_n = 1$ 、 $y_n = n$, 则 $x_n \rightarrow 1$, 而 $x_n y_n = n \rightarrow +\infty$;
- 取 $x_n = 1/n$ 、 $y_n = n$, 则 $x_n \rightarrow 0$, 而 $x_n y_n \equiv 1$;
- 取 $x_n = 1/n$ 、 $y_n = n^2$, 则 $x_n y_n = n \rightarrow +\infty$.

所以乘积可能收敛, 也可能发散.

第 3 题

(1) 分子、分母同除以 3^n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

(2) 分子分母同时有理化:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(3) 记

$$A = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

两次使用平方差公式可得

$$A = -\frac{2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{(n+2)n} + n + 1)}.$$

分母除以 $n^{3/2}$ 后趋于 4, 故 $n^{3/2}A \rightarrow -1/4$, 原极限为 $-1/4$.

(4) 由等比数列求和,

$$\frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n} = \frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}.$$

因 $|a| < 1, |b| < 1$, 两个幂都趋于 0, 极限为 $(1-b)/(1-a)$ 。

(5) 因数分解并望远镜相消:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(6) 令 $r = 1/a \in (0, 1)$ 。由

$$S_n = \sum_{k=1}^n kr^k, \quad rS_n = \sum_{k=1}^n kr^{k+1},$$

相减得到

$$(1-r)S_n = r - r^{n+1} - nr^{n+1} = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{1-r}.$$

再令 $n \rightarrow \infty$, 极限为

$$\frac{r}{(1-r)^2} = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

练习 2.3

第 1 题

(1)

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

(2) 取整数 $N > 2|a|$ 。当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left| \frac{a^N}{N!} \right| \prod_{k=N+1}^n \frac{|a|}{k} \leq \left| \frac{a^N}{N!} \right| \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N} \rightarrow 0.$$

(3) 先取整数 $m > \max\{s, 0\}$ 。对 $n \geq 2(m+1)$, 二项式定理给出

$$a^n \geq \binom{n}{m+1} \left(1 - \frac{1}{a} \right)^{m+1} \geq C_a n^{m+1},$$

其中 $C_a > 0$ 只依赖 a 和 m 。因此 $0 \leq n^s/a^n \leq n^m/a^n \rightarrow 0$ 。

(4) 令 $t = n^s \rightarrow +\infty$ 。若 $a > 1$, 则

$$\frac{\log_a n}{n^s} = \frac{1}{s \ln a} \frac{\ln t}{t} \rightarrow 0;$$

若 $0 < a < 1$, 分母 $\ln a < 0$, 同样得到极限 0。这里先用 $e^v \geq v^2/2$ 证明 $\ln t/t \rightarrow 0$ 。

第 2 题

(1) 括号内

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right).$$

而 $1 - 1/2 + \cdots + (-1)^{n+1}/n$ 有界, 所以原极限为 0。

(2) 分解

$$\frac{n+k}{n^2+k} = \frac{1}{n} + \frac{k(n-1)}{n(n^2+k)}.$$

又由

$$\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{n+1}{2n}$$

得到第二个和式趋于 $1/2$, 故原极限为 $1 + 1/2 = 3/2$ 。

(3) 取对数:

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0.$$

由指数函数的连续性, 原极限为 $e^0 = 1$ 。

(4) 由二项式定理, 若 $2^{1/n} = 1 + h_n$, 则

$$2 = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

故 $0 \leq \sqrt[n]{2} - 1 \leq 1/n$ 。又 $|\cos n| \leq 1$, 从而

$$0 \leq \left| \log_2 n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) \cos n \right| \leq \frac{\log_2 n}{n} \rightarrow 0.$$

原极限为 0。

(5)

$$\frac{n^{1+1/n}}{n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

第 3 题

(1) 记 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 。归纳可得

$$\sqrt{2} \leq x_n \leq 2.$$

并且 $x_{n+1} \geq x_n$ 等价于 $2x_n \geq x_n^2$, 由 $x_n \leq 2$ 成立。故单调递增且有上界。设极限为 L , 则 $L = \sqrt{2L}$, 结合 $L > 0$ 得 $L = 2$ 。

(2) 记

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

由 $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = 1/(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$ 得

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0,$$

所以数列递减。另一方面,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}),$$

求和得到 $x_n \geq 0$ 。故由单调收敛原理, $\{x_n\}$ 收敛。

练习 2.4

第 1 题

(1) 因 $0 < q < 1$, 令 $\alpha = -\ln q > 0$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 当

$$x > \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

时, $0 < q^x = e^{-\alpha x} < \varepsilon$.

(2) 对 $0 < \varepsilon < 1$ 取

$$\delta = \min \{1 - a^\varepsilon, a^{-\varepsilon} - 1\} > 0.$$

当 $|x - 1| < \delta$ 时, $-\varepsilon < \log_a x < \varepsilon$ ($0 < a < 1$ 时由对数单调性反向, 结论相同).

(3) 在 $x = 2$ 附近,

$$\left| \frac{x+1}{2x^2-3} - \frac{3}{5} \right| = \frac{|x-2||6x+7|}{5|2x^2-3|}.$$

取 $|x - 2| \leq 1/2$, 右端不超过 $\frac{44}{15}|x - 2|$. 故给定 $\varepsilon > 0$, 取

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{15}{44}\varepsilon \right\}$$

即可。

(4) 当 $x \neq 3$ 时,

$$\frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{x+3}{x+4}.$$

因而对 $|x - 3| \leq 1$,

$$\left| \frac{x+3}{x+4} - \frac{6}{7} \right| = \frac{|x-3|}{7|x+4|} \leq \frac{|x-3|}{42}.$$

取 $\delta < \min\{1, 42\varepsilon\}$.

(5) 设 $0 < \varepsilon < \pi/2$. 令 $M = \tan(\pi/2 - \varepsilon) > 0$. 当

$$0 < -x < 1/M$$

时, $1/x < -M$, 故

$$|\arctan(1/x) + \pi/2| < \varepsilon.$$

(6) 先处理 $x_0 \neq 0$. 对 x 在 x_0 与 $2x_0$ 之间取值, 利用

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

得到

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{(|x_0|/2)^{2/3}}.$$

因此给定 $\varepsilon > 0$, 取

$$\delta < \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^{2/3}}{2^{2/3}} \varepsilon \right\}.$$

当 $x_0 = 0$ 时, $|x| < \varepsilon^3$ 就给出 $|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$.

(7) 由指数函数的熟知的初等估计, 当 $|h| \leq 1$ 时,

$$|e^h - 1| \leq 2|h|.$$

于是

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0} |e^{x-x_0} - 1| \leq 2e^{x_0} |x - x_0|.$$

取 $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2e^{x_0})\}$ 即得按定义连续。

第 2 题

(1) 令 $x_0 = 1/n$, 其中 $n \geq 2$.

当 $x < x_0$ 且充分接近 x_0 时, $n < 1/x < n+1$, 故 $[1/x] = n$, 从而

$$f(x) = \frac{1}{x} - n \rightarrow 0.$$

当 $x > x_0$ 且充分接近 x_0 时, $n-1 < 1/x < n$, 故 $[1/x] = n-1$, 从而

$$f(x) = \frac{1}{x} - (n-1) \rightarrow 1.$$

所以左、右极限分别为 0, 1。

(2) 先求内层极限。当 $0 \leq x < 1$ 时, $x^{2n} \rightarrow 0$, 故

$$f(x) = \ln(x+2) \quad (0 \leq x < 1).$$

当 $x > 1$ 时, 分子分母同除以 x^{2n} , 得到

$$f(x) = -\sin x \quad (x > 1).$$

在 $x = 1$ 处,

$$f(1) = \frac{\ln 3 - \sin 1}{2}.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\sin 1.$$

第 3 题

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq A$ 当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, 都可找到 x 满足

$$x_0 < x < x_0 + \delta, \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq A$ 当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $X > 0$, 都可找到 x 满足

$$|x| > X, \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

练习 2.5

第 1 题

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

(2) 令 $t = \sqrt[n]{x}$ ($x > 0$), 则 $t \rightarrow 1$, 且

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{t^n - 1}{t^n - 1} \rightarrow \frac{n}{n}.$$

(3) 令 $t = \sqrt[3]{x}$. 当 $x \rightarrow -8$ 时 $t \rightarrow -2$, 并且

$$\frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt{1-t^3} - 3}{2 + t} = -\frac{t^2 - 2t + 4}{\sqrt{1-t^3} + 3}.$$

代入 $t = -2$ 得极限 -2 。

(4) 写

$$\frac{(1+\alpha x)^{1/m}(1+\beta x)^{1/n} - 1}{x} = \frac{(1+\alpha x)^{1/m} - 1}{x}(1+\beta x)^{1/n} + \frac{(1+\beta x)^{1/n} - 1}{x}.$$

若 $u = (1+cx)^{1/r} - 1$, 则 $x = ((1+u)^r - 1)/c$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+cx)^{1/r} - 1}{x} = \frac{c}{r}.$$

所求和为 $\alpha/m + \beta/n$ 。

(5)

$$\frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \frac{3x + \ln(1 + 2e^{-3x})}{2x + \ln(3e^{-2x} + 1)} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

(6) 令 $x = \pi + t$. 由 $\sin(m\pi + mt) = (-1)^m \sin(mt)$,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = (-1)^{m-n} \frac{\sin(mt)}{\sin(nt)} \rightarrow (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

练习 2.6

第 1 题

(1) 对 $x \in [n, n+1]$,

$$n^{1/(n+1)} \leq x^{1/x} \leq (n+1)^{1/n}.$$

而 $n^{1/n} \rightarrow 1$, 所以两端的两个幂也趋于 1。由夹逼原理,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1.$$

(2) 令 $n = \lfloor x \rfloor$ 。当 $x \geq 1$ 时,

$$0 < \frac{x^s}{a^x} \leq \frac{(n+1)^s}{a^n} = a \frac{(n+1)^s}{a^{n+1}} \rightarrow 0,$$

其中最后的趋于 0 是练习 2.3 第 1(3) 题。

(3) 令 $t = \log_a x$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $|t| \rightarrow +\infty$, 且

$$\frac{\log_a x}{x^s} = \frac{t}{a^{st}} = \frac{t}{(a^{st})}.$$

由指数增长快于多项式增长, 极限为 0。

(4) 令 $t = 1/x \rightarrow +\infty$ 。则 $|\log_a x| = \log_{1/a} t$ (若 $a > 1$ 也可写成 $\log_a t$),

$$0 \leq |x^s \log_a x| \leq \frac{\log_{1/a} t}{t^s} \rightarrow 0.$$

第 2 题

(1) 设 $y = 1/x$ 。由 $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$,

$$|x \lfloor 1/x \rfloor - 1| = |x| |\lfloor 1/x \rfloor - 1/x| < |x| \rightarrow 0.$$

故极限为 1。

(2) 由 $\sin(k\pi + t) = (-1)^k \sin t$,

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right).$$

正弦的宗量趋于 0, 故极限为 0。

(3) 由恒等式

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k},$$

得到乘积为

$$P_n(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}.$$

当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin(x/2^n) = x$, 所以 $P_n(x) \rightarrow \sin x/x$ 。当 $x = 0$ 时, $P_n(0) \equiv 1$ 。因此极限为

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

第 3 题

归结原则 (右极限) 设 f 在 $(x_0, x_0 + \delta_0)$ 有定义。则

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

当且仅当: 对于任意数列 $\{x_n\} \subset (x_0, x_0 + \delta_0)$, 只要 $x_n \rightarrow x_0$ 且 $x_n > x_0$, 就有 $f(x_n) \rightarrow A$ 。

证明 必要性直接由函数极限定义得到。反之, 若结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对每个 n 都能取到

$$0 < x_n - x_0 < 1/n, \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

这给出一个从右侧趋于 x_0 的数列, 但 $f(x_n)$ 不趋于 A , 与题设条件矛盾。

归结原则 ($x \rightarrow -\infty$) 设 f 在 $(-\infty, X_0)$ 有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 当且仅当对任意 $x_n \rightarrow -\infty$, 都有 $f(x_n) \rightarrow A$ 。证明和上面完全一样, 只需把邻域 $(x_0, x_0 + \delta)$ 换成 $(-\infty, X_0)$, 把 $x_n \rightarrow x_0^+$ 换成 $x_n \rightarrow -\infty$ 。

第 4 题

(1) f 在 x_0 左侧极限存在的柯西准则为: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当

$$x_0 - \delta < x' < x_0, \quad x_0 - \delta < x'' < x_0$$

时, 总有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

(2) f 在 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在的柯西准则为: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使当 $|x'|, |x''| > X$ 时, 总有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

练习 2.7

第 1 题

(1) 对 $n \geq 2$, $n^2 - 3 > 0$, 并且

$$\frac{n^2 - 3}{2n + 1} \geq \frac{n^2 - 3}{3n} \geq \frac{n}{6}.$$

给定 $M > 0$, 取 $N > 6M$, 则 $n > N$ 时该式大于 M , 故为无穷大量。

(2) 记调和和 $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ 。对任意 n ,

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

反复使用得 $H_{2^m} \geq 1 + m/2$, 故 $\{H_n\}$ 为无穷大量。

第 2 题

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq +\infty$ 当且仅当存在 $M > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, 都可找到

$$x_0 - \delta < x < x_0, \quad f(x) \leq M.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty$ 当且仅当存在 $M > 0$, 使得对任意 $X > 0$, 都可找到

$$x > X, \quad f(x) \geq -M.$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq +\infty$ 当且仅当存在 $M > 0$, 使得对任意 $X > 0$, 都可找到

$$|x| > X, \quad f(x) \leq M.$$

第 3 题

(1) 设 $0 < a < 1$ 。对任意 $M > 0$, 取 $0 < \delta < a^M$ 。若 $0 < x < \delta$, 由底数小于 1 的对数单调递减,

$$\log_a x > M.$$

故极限为 $+\infty$ 。

(2)

$$\frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x(x + 1)}{x - 1}.$$

当 $x < -2$ 时该式为负, 且

$$\left| \frac{x^2 + x}{x - 1} \right| \geq \frac{x^2/2}{(|x| + 1)} \geq \frac{|x|}{3}.$$

因此当 $x \rightarrow -\infty$ 时它趋于 $-\infty$ 。

(3) 当 $|x|$ 很大时, 令 $t = 1/x$ 。在 $|t| \leq \pi/4$ 上有

$$|\sin t| \leq |t|, \quad |\cos t| \geq 1/\sqrt{2},$$

故

$$|\cot(1/x)| = \frac{|\cos t|}{|\sin t|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}|t|} = \frac{|x|}{\sqrt{2}} \rightarrow +\infty.$$

第 4 题

(1) 归结原则 若 f 在 x_0 的某去心邻域内有定义, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

当且仅当对任意 $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \neq x_0$), 都有 $f(x_n) \rightarrow +\infty$ 。

证明 必要性显然。反之, 若极限不是 $+\infty$, 则存在 $M > 0$, 使得任意 $\delta > 0$ 都有某个 $x \neq x_0$ 满足 $|x - x_0| < \delta$ 且 $f(x) \leq M$ 。取 $\delta = 1/n$ 得 $x_n \rightarrow x_0$, 但 $f(x_n) \not\rightarrow +\infty$, 矛盾。

(2) 归结原则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 当且仅当对任意满足 $|x_n| \rightarrow \infty$ 的数列, 都有 $f(x_n) \rightarrow -\infty$ 。证明只需把 $+\infty$ 情形中的 $f(x) \leq M$ 换成 $f(x) \geq -M$, 把邻域换成 $|x| > X$ 。

第 5 题

(1) 由 $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$ 及对数连续性,

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x} \rightarrow \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

(2) 令 $t = a^x - 1$, 则 $t \rightarrow 0$ 且 $x = \log_a(1+t)$ 。于是

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\log_a(1+t)} \rightarrow \ln a.$$

(3) 分成

$$\frac{a^x - x^a}{x - a} = \frac{a^x - a^a}{x - a} - \frac{x^a - a^a}{x - a}.$$

第一项为

$$a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x-a} \rightarrow a^a \ln a.$$

若令 $u = x/a - 1$, 则第二项

$$a^a \frac{(1+u)^a - 1}{au} \rightarrow a^a.$$

故极限为 $a^a(\ln a - 1)$ 。

(4) 利用 $\ln(1+t)/t \rightarrow 1$ 以及 $t \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln(e^x + \sin^2 x) - x}{\ln(e^{2x} + \arcsin^2 x) - 2x} = \frac{\ln(1 + e^{-x} \sin^2 x)}{\ln(1 + e^{-2x} \arcsin^2 x)} \sim \frac{e^{-x} \sin^2 x}{e^{-2x} \arcsin^2 x} \rightarrow 1.$$

(5) 由 $\tan(\pi/4 + u) - 1 = 2 \tan u / (1 - \tan u)$ 及 $\ln(1+t)/t \rightarrow 1$,

$$\frac{\ln \tan(\pi/4 + ax)}{\sin bx} \sim \frac{2 \tan(ax)}{bx} \rightarrow \frac{2a}{b}.$$

(6) 令 $t = \alpha \ln(1+x) \rightarrow 0$ 。则

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \frac{e^t - 1}{t} \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow \alpha.$$

(7) 令 $y = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ 。则

$$\sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1) = \sqrt[n]{n} (e^y - 1) = \frac{e^y - 1}{y} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 0.$$

(8) 令 $t = 1/x$, 则

$$\ln \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \ln x = \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right) (-\ln t).$$

当 $0 < t < 1$ 时, $\sin t/t \geq 1/2$, 且

$$0 \leq -\ln(\sin t/t) \leq \frac{t}{\sin t} \left(1 - \frac{\sin t}{t} \right).$$

由 $1 - \sin t/t \leq t^2/6$, 上式不超过 Ct^2 , 所以原式绝对值不超过 $Ct^2 |\ln t| \rightarrow 0$ 。

习题 2 (A 组)

第 1 题

因 $a < 1$, 取 q 满足 $a < q < 1$ 。由相邻项比值的极限, 存在 N , 使 $n \geq N$ 时

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q.$$

于是 $n \geq N$ 时 $|x_n| \leq |x_N|q^{n-N} \rightarrow 0$ 。

第 2 题

由递推式,

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n).$$

故

$$x_{n+1} - x_n = (-1/2)^{n-1}(b - a).$$

因此

$$x_n = a + (b - a) \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \longrightarrow a + \frac{b - a}{1 + 1/2} = \frac{a + 2b}{3}.$$

这就同时证明了收敛性并求出极限。

第 3 题

记

$$S_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad S_n \rightarrow a.$$

因 $a_n = S_n n - S_{n-1}(n-1)$,

$$\frac{a_n}{n} = S_n - \frac{n-1}{n} S_{n-1} \rightarrow a - a = 0.$$

第 4 题

先设 $a > 0$ 。由于 $\ln$ 连续, $\ln(x_n/a) \rightarrow 0$ 。收敛数列的算术平均值也收敛于同一极限, 故

$$\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{x_k}{a} \rightarrow 0.$$

由指数函数连续性,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \rightarrow a.$$

若 $a = 0$, 则 $0 < \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq (x_1 + \cdots + x_n)/n \rightarrow 0$, 结论仍成立。

逆命题不真。取 $x_n = 2^{(-1)^n}$, 即

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2}, \quad x_{2k} = 2.$$

则 $x_1 \cdots x_n$ 恒为 1, 所以几何平均恒为 1; 但 $\{x_n\}$ 没有极限。

第 5 题

记 $r_n = x_{n+1}/x_n \rightarrow a \geq 0$ 。若 $a > 0$, 则

$$x_n = x_1 r_1 r_2 \cdots r_{n-1},$$

由第 4 题 (用于正数列 $\{r_n\}$),

$$\sqrt[n]{x_n} = x_1^{1/n} (r_1 \cdots r_{n-1})^{1/n} \rightarrow a.$$

若 $a = 0$, 给定 $0 < \varepsilon < 1$, 取 N , 使 $n \geq N$ 时 $r_n \leq \varepsilon/2$ 。于是

$$0 \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \left(x_1 \prod_{k=1}^{N-1} r_k \right)^{1/n} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{(n-N)/n} \rightarrow \frac{\varepsilon}{2},$$

故极限为 0。

逆命题不真。仍取 $x_n = 2^{(-1)^n}$, 则 $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1$, 但

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

在 1/4 与 4 之间交替, 不收敛。

第 6 题

因为 x_n, y_n 都收敛, 所以 $\{x_n\}$ 有界。设 $|y_n| \leq M$ 。把差写成

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_{n+1-k} - ab = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a) y_{n+1-k} + a \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j - b \right).$$

第二项趋于 0。第一项中, $x_k - a \rightarrow 0$ 且 $|y_{n+1-k}| \leq M$, 故其绝对值不超过

$$\frac{M}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - a| \rightarrow 0.$$

原极限为 ab 。

第 7 题

不妨设 $\{a_n\}$ 递增；递减情形完全对称。

令

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

递增数列有 $b_n \leq a_n$, 所以

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

另一方面, 固定任意 m 。当 $n \geq m$ 时, 因为 $a_{m+1}, \dots, a_n \geq a_m$,

$$b_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m a_k + \frac{n-m}{n} a_m.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得 $a \geq a_m$ 。由于 m 任意, $\limsup a_n \leq a$ 。于是 $a_n \rightarrow a$ 。递减情形把所有不等号反向即可。

第 8 题

先证对所有 n , $x_n \leq y_n$ 。初始由 $x_1, y_1 > 0$ 及

$$\sqrt{x_1 y_1} \leq \frac{x_1 + y_1}{2}$$

成立; 递推保持这个不等式。于是

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq x_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n.$$

因此 $\{x_n\}$ 递增且有上界 y_1 , $\{y_n\}$ 递减且有下界 x_1 。设

$$x_n \rightarrow X, \quad y_n \rightarrow Y.$$

在递推式中取极限:

$$X = \sqrt{XY}, \quad Y = \frac{X+Y}{2}.$$

两式给出 $X = Y$ 。

第 9 题

由算术-几何平均不等式,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{a} \quad (n \geq 1).$$

因此从 x_2 起, $x_n \geq \sqrt{a}$ 。并且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0 \quad (n \geq 2).$$

故 $\{x_n\}_{n \geq 2}$ 单调递减且有下界, 收敛。设极限为 L , 则 $L > 0$ 且

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right),$$

从而 $L^2 = a$, 即 $L = \sqrt{a}$ 。

第 10 题

对 $m > n$,

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = A_m - A_n.$$

由于 A_n 非负、递增且有界, $\{A_n\}$ 收敛, 从而 $A_m - A_n \rightarrow 0$ (当 $m > n \rightarrow \infty$)。于是 $\{a_n\}$ 是柯西数列, 必收敛。

第 11 题

反复使用题设不等式,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^{n-1} |x_2 - x_1|.$$

于是对 $m > n$,

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} |x_2 - x_1| \rightarrow 0.$$

故 $\{x_n\}$ 为柯西数列, 从而收敛。

第 12 题

令

$$L = \sqrt{1+x} - 1, \quad 0 \leq L \leq \sqrt{2} - 1.$$

则 $L = (x - L^2)/2$ 。由归纳法可证 $0 \leq x_n \leq \sqrt{x}$: 当 $n = 1$ 时由 $x \leq 1$ 得 $x_1 = x/2 \leq \sqrt{x}$; 若 $0 \leq x_n \leq \sqrt{x}$, 则

$$0 \leq x_{n+1} = \frac{x - x_n^2}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \sqrt{x}.$$

所以从 $n \geq 2$ 起 $x_n \leq x/2 \leq 1/2$ 。于是

$$|x_{n+1} - L| = \frac{1}{2}|L^2 - x_n^2| = \frac{1}{2}(L + x_n)|x_n - L| \leq q|x_n - L|,$$

其中 $q = (L + 1/2)/2 < 1$ 。故 $\{x_n\}$ 以速度至少等比地收敛到 L , 极限为

$$\sqrt{1+x} - 1.$$

第 13 题

(1) 令

$$g(t) = \frac{1}{1+t}, \quad L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

L 是 $t = g(t)$ 的唯一正解。注意 $x_2 = 1/2$, 且从第 2 项起所有 $x_n \in [1/2, 1]$ 。对该区间内任意 u, v ,

$$|g(g(u)) - g(g(v))| = \frac{|u-v|}{(2+u)(2+v)} \leq \frac{4}{25}|u-v|.$$

因此两个偶、奇子列分别收敛。它们的极限都满足 $t = g(t)$, 故同为 L 。所以 $x_n \rightarrow L$ 。

(2) 令

$$y_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

则 $y_1 = 1$, 且

$$y_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}}{F_n + F_{n+1}} = \frac{1}{1+y_n}.$$

因此 $\{y_n\}$ 正是第 (1) 小题的数列, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

第 14 题

回忆黎曼函数: 无理点取 0; 既约有理数 p/q 取 $1/q$ 。固定 $x_0 \in \mathbb{R}$, 任给 $\varepsilon > 0$, 取整数

$$Q > \frac{1}{\varepsilon}.$$

在闭区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 内, 分母不超过 Q 的既约有理数只有有限个。去掉可能等于 x_0 的那个后, 剩余这些点到 x_0 的距离有正的最小值。取 δ 小于这个最小值且 $\delta < 1$ 。当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时:

- 若 x 无理, 则 $R(x) = 0 < \varepsilon$;
- 若 $x = p/q$ 为既约有理数, 则 $q > Q$, 故 $R(x) = 1/q < 1/Q < \varepsilon$ 。

因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ 。

第 15 题

必要性就是归结原则。下证充分性。

若右极限不是 A , 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得任意 $\delta > 0$ 都有

$$x_0 < x < x_0 + \delta, \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

据此可递推地取严格递减的 $x_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ 且 $x_n \rightarrow x_0$ (每一步把邻域半径缩小到上一步取得点与 x_0 的距离以下)。按题设应有 $f(x_n) \rightarrow A$, 却始终 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, 矛盾。

第 16 题

设极限为 L 。分别取趋于 $+\infty$ 的数列

$$2k\pi, \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad 2k\pi + \pi, \quad 2k\pi + \frac{3\pi}{2}.$$

沿这些数列的函数值分别为

$$b, \quad a, \quad -b, \quad -a,$$

都应趋于 L 。于是 $a = b = 0$ 。

第 17 题

设 $T \neq 0$ 是周期。对任意 $x \in \mathbb{R}$, 数列 $x + nT \rightarrow +\infty$, 而

$$f(x + nT) = f(x).$$

由题设 $f(x + nT) \rightarrow 0$, 故 $f(x) = 0$ 。对任意 x 成立, 所以 $f \equiv 0$ 。

第 18 题

对任意固定的 $x > 0$, 反复利用 $f(2u) = f(u)$,

$$f(x) = f(2^n x).$$

由于 $2^n x \rightarrow +\infty$, 题设给出 $f(2^n x) \rightarrow A$ 。左边恒等于 $f(x)$, 故 $f(x) = A$ 。对任意 $x > 0$ 都成立, 即 $f \equiv A$ 。

第 19 题

设 $|f(t)| \leq M$ 当 $|t| < \delta$ 。对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = b f(x/a) = b^2 f(x/a^2) = \cdots = b^n f(x/a^n).$$

当 n 充分大时 $|x/a^n| < \delta$, 所以

$$|f(x)| \leq Mb^n$$

对全部充分大的 n 成立。因 $b > 1$, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $f(x) = 0$ 。故 $f \equiv 0$, 特别地 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。

第 20 题

先设 f 在 $[a, b]$ 上严格递增。若 $x_n \rightarrow a$, 则存在 $\rho > 0$ 及子列 $x_{n_k} \geq a + \rho$ 。由于 f 严格递增,

$$f(x_{n_k}) \geq f(a + \rho) > f(a).$$

这与 $f(x_n) \rightarrow f(a)$ 矛盾。严格递减时, $f(a)$ 是函数值中的最大端; 同理, 若 $x_{n_k} \leq b - \rho$, 则 $f(x_{n_k}) \leq f(b - \rho) < f(a)$, 同样矛盾。故 $x_n \rightarrow a$ 。

第 21 题

设 f 在 (a, b) 上递增, 固定 $x_0 \in (a, b)$ 。集合

$$\{f(x) : a < x < x_0\}$$

非空且有上界 $f(x_0)$, 故有上确界, 记为 L^- 。由上确界定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_1 < x_0$ 使 $f(x_1) > L^- - \varepsilon$ 。当 $x_1 < x < x_0$ 时,

$$L^- - \varepsilon < f(x) \leq L^-,$$

所以左极限存在且为 $L^- \leq f(x_0)$ 。

同理, $\{f(x) : x_0 < x < b\}$ 非空且有下界 $f(x_0)$, 其下确界记为 L^+ 。适当选取 $x_2 > x_0$ 后, 当 $x_0 < x < x_2$ 时有 $L^+ \leq f(x) < L^+ + \varepsilon$, 故右极限存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

第 22 题

先设 f 递增。固定 $a > 1$, 取整数 m , 使

$$2^m \leq a < 2^{m+1}.$$

由单调性, 对 $x > 0$,

$$1 \leq \frac{f(ax)}{f(x)} \leq \frac{f(2^{m+1}x)}{f(x)} = \prod_{j=0}^m \frac{f(2^{j+1}x)}{f(2^jx)}.$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 右边每个因子都趋于 1, 所以 $f(ax)/f(x) \rightarrow 1$ 。

若 $0 < a < 1$, 令 $b = 1/a > 1$, 并取 $y = ax \rightarrow +\infty$ 。则

$$\frac{f(ax)}{f(x)} = \frac{1}{f(y/b)/f(y)} \rightarrow 1.$$

若 f 递减, 所有不等号反向, 但夹逼论证相同; $a < 1$ 仍用倒数化归到 $b > 1$ 。因此对全部 $a > 0$ 结论成立。

第 23 题

设 f 递增。给定任意 $\varepsilon > 0$, 因 $f(x_n) \rightarrow A$, 存在 N , 使 $n \geq N$ 时

$$A - \varepsilon < f(x_n) < A + \varepsilon.$$

因 $x_n \rightarrow +\infty$, 可令

$$X = \max\{x_1, \dots, x_N\}.$$

并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 可取到指标 $k, \ell \geq N$, 使得 $x_k \leq x \leq x_\ell$ 。由单调性,

$$f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_\ell),$$

从而

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 。

第 24 题

唯一性: 若 $f(\xi) = \xi$ 、 $f(\eta) = \eta$, 则

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq \alpha |\xi - \eta|.$$

因 $0 < \alpha < 1$, 只能 $\xi = \eta$ 。

存在性: 取 $x_1 = a$, 并令 $x_{n+1} = f(x_n)$ 。由映射条件 $x_n \in [a, b]$, 且

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^{n-1} |x_2 - x_1|.$$

与 A 组第 11 题同样的几何估计表明 $\{x_n\}$ 是柯西数列。设 $x_n \rightarrow \xi \in [a, b]$ 。由题设不等式,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

说明 f 连续, 故在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 中取极限得 $\xi = f(\xi)$ 。

第 25 题

若 $x_n \rightarrow +\infty$, 给定 $M > 0$, 存在 N , 使 $k > N$ 时 $x_k > 2M$ 。于是当 $n > 2N$ 时,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n 2M \geq 2M \left(1 - \frac{N}{n}\right) > M.$$

故平均值趋于 $+\infty$ 。

逆命题不真。例如

$$x_{2k-1} = 2k - 1, \quad x_{2k} = 0.$$

其前 n 项平均仍趋于 $+\infty$, 但 $\{x_n\}$ 本身不趋于 $+\infty$ 。

第 26 题

先设 $A \in \mathbb{R}$ 。任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使 $n \geq N$ 时

$$A - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < A + \varepsilon.$$

由于 $y_{n+1} - y_n > 0$, 对 $n > N$ 求和:

$$(A - \varepsilon)(y_n - y_N) < x_n - x_N < (A + \varepsilon)(y_n - y_N).$$

同除以 y_n , 并利用 $x_N/y_n \rightarrow 0$ 、 $y_N/y_n \rightarrow 0$, 得到

$$A - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq A + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得 $x_n/y_n \rightarrow A$ 。

若 $A = +\infty$, 任给 $M > 0$, 当 n 足够大时

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > M.$$

同样求和并除以 y_n , 得 $x_n/y_n \geq M$ (当 n 充分大), 故极限为 $+\infty$ 。 $A = -\infty$ 时把不等号反向即可。

第 27 题

先证 $x_n \rightarrow 0$ 。由 $0 < x_1 < 1$, 归纳可得 $0 < x_n < 1$ 且

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < x_n.$$

故极限 $L \in [0, 1)$ 存在。取极限得 $L = L(1 - L)$, 所以 $L = 0$ 。

令

$$a_n = \frac{1}{x_n}.$$

因为

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(1-x_n)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{1-x_n},$$

所以

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{x_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-x_k} \right].$$

由于 $1/(1-x_k) \rightarrow 1$, 括号内的平均值趋于 1。因此 $a_n/n \rightarrow 1$, 即

$$nx_n = \frac{1}{a_n/n} \rightarrow 1.$$

习题 2 (B 组)

第 1 题

由题设,

$$(a_{n+1} - a_{n-1}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) \rightarrow 0.$$

于是对偶数项,

$$a_{2m} - a_0 = \sum_{k=1}^m (a_{2k} - a_{2k-2}),$$

右端是 m 个趋于 0 的量之和, 故 $a_{2m} = o(m)$ 。对奇数项同理,

$$a_{2m+1} - a_1 = \sum_{k=1}^m (a_{2k+1} - a_{2k-1}) = o(m).$$

所以无论 n 奇偶, 都有 $a_n = o(n)$ 。原命题要证的 $a_n - a_{n-1}$ 也是 $o(n)$: 利用已证的偶数、奇数两种情形分别是 $a_n = o(n)$ 与 $a_{n-1} = o(n)$, 所以

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{n} \rightarrow 0.$$

第 2 题

反设只有有限多个这样的下标。设 N 之后的项都不满足条件, 则对每个 $n > N$, 都存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使

$$x_{n+k} \geq x_n.$$

取

$$M = x_{N+1} > 0.$$

由于 $x_n \rightarrow 0$, 集合 $\{n > N : x_n \geq M\}$ 非空且有限。取其中最大的下标 r 。于是对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 使

$$x_{r+k} < M \leq x_r.$$

所以 r 是一个满足题意的下标, 并且 $r > N$, 与反设中 “ N 之后没有” 矛盾。故这样的下标有无限多个。

第 3 题

设 $M > 0$ 使 $|a_k| \leq M$ 。任给 $0 < \varepsilon < 1$, 取 K , 使 $k \geq K$ 时

$$|a_k - a| < \varepsilon.$$

记

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

由二项式定理 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ 。因此

$$\left| \frac{S_n}{2^n} - a \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{K-1} \binom{n}{k} |a_k - a| + \varepsilon.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{K-1} \binom{n}{k} \rightarrow 0$$

(固定有限个二项式系数相对 2^n 可忽略)。先令 $n \rightarrow \infty$ 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k}{2^n} = a.$$

第 4 题

记

$$z_n = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

由题设

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n^2} \geq 0,$$

故 $\{z_n\}$ 单调递增。又 $\{x_n\}$ 有上界, 而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

的部分和有界 (例如 $1/(k^2) \leq 1/[k(k-1)]$, $k \geq 2$), 所以 $\{z_n\}$ 有上界。由单调收敛原理, $\{z_n\}$ 收敛。于是

$$x_n = z_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

也收敛。

第 5 题

令

$$T(x) = \frac{x + f(x)}{2}.$$

因 $f([a, b]) \subset [a, b]$, 所以 $T([a, b]) \subset [a, b]$ 。并且当 $x \neq y$ 时,

$$T(x) - T(y) = \frac{1}{2}[(x - y) + (f(x) - f(y))],$$

故

$$|T(x) - T(y)| < |x - y|.$$

先证 T 有不动点。函数 $h(x) = |T(x) - x|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 取最小值点 ξ 。若 $h(\xi) > 0$, 由严格距离压缩性,

$$h(T(\xi)) = |T(T(\xi)) - T(\xi)| < |T(\xi) - \xi| = h(\xi),$$

与 $h(\xi)$ 是最小值矛盾。因此 $T(\xi) = \xi$ 。

再令 $d_n = |x_n - \xi|$ 。由

$$d_{n+1} = |T(x_n) - T(\xi)| < d_n$$

知 $\{d_n\}$ 单调递减, 设其极限为 ρ 。若 $\rho > 0$, 取子列 $x_{n_j} \rightarrow \eta \in [a, b]$ 。则 $|\eta - \xi| = \rho$, 故 $\eta \neq \xi$, 从而

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_{n_j+1} = |T(\eta) - \xi| < |\eta - \xi| = \rho,$$

这与 $d_n \rightarrow \rho$ 矛盾。故 $\rho = 0$, 即 $x_n \rightarrow \xi$ 。

第 6 题

记

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

由二项式定理,

$$E_n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n.$$

对固定的 m , 当 $n \geq m$ 时

$$E_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 右端趋于 $\sum_{k=0}^m 1/k! = S_m$ 。于是

$$S_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n \leq S.$$

再令 $m \rightarrow \infty$, 利用 $\lim E_n = e$ 与 $S_m \rightarrow S$, 得到 $S = e$ 。

第 7 题

由恒等式 $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$,

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+j)!}.$$

对 $j \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+j)!} < \frac{1}{n!(n+1)^j},$$

因此

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n!n}.$$

第 8 题

反设 $e = p/q$, 其中 p, q 为正整数。由第 7 题,

$$0 < q!e - \sum_{k=0}^q q! \frac{1}{k!} < \frac{q!}{q!q} = \frac{1}{q} \leq 1.$$

另一方面,

$$q!e = q!p/q = (q-1)!p$$

是整数, 而

$$\sum_{k=0}^q q! \frac{1}{k!}$$

也是整数, 故两者之差是正整数, 不可能满足上式。矛盾, 所以 e 是无理数。

第 9 题

由数列 $\{(1 + 1/n)^n\}$ 递增趋于 e 、 $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}$ 递减趋于 e ，对任意正整数 n ，

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

对三边取自然对数，得

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

第一式除以 n 、第二式除以 $n+1$ ，就有

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

第 10 题

记 $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ ， $a_n = H_n - \ln n$ 。由第 9 题，

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

故 $\{a_n\}$ 递减。另一方面，

$$H_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} > 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln n,$$

所以 $a_n > 0$ 。单调递减且有下界 0，故 $\{a_n\}$ 收敛。

第 11 题

记

$$r_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

则

$$e n! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + n! r_n.$$

第一项是整数。又

$$n! r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots.$$

后一项至多是前一项的 $1/(n+1)$ 倍，故

$$\frac{n}{n+1} < n n! r_n \leq n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right) = 1.$$

首项给出下界, 几何估计给出上界, 故

$$n n! r_n \rightarrow 1.$$

记 $u_n = 2\pi n n! r_n \rightarrow 2\pi$ 。整数项不影响正弦值, 所以

$$n \sin(2\pi e n!) = n \sin(2\pi n! r_n) = u_n \frac{\sin u_n}{u_n} \rightarrow 2\pi.$$

第 12 题

令 $b_n = a_n - a$, 则题设化为

$$\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \rightarrow 0, \quad n(b_n - b_{n-1}) \rightarrow 0.$$

记 $d_k = k(b_k - b_{k-1})$ (补充 $b_0 = 0$)。由阿贝尔求和,

$$b_n = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k} d_k.$$

第一项趋于 0。第二项是 d_k 的加权算术平均; 因 $d_k \rightarrow 0$ 且权重有界, 它也趋于 0。故 $b_n \rightarrow 0$, 即 $a_n \rightarrow a$ 。

第 13 题

记

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

由题设 $x_n S_n \rightarrow 1$, 所以当 n 足够大时 $x_n > 0$ 。若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $1/S_n \geq c > 0$, 而 $x_n \sim 1/S_n$, 于是 x_n^2 不可能沿所有项趋于 0, 这与 S_n 收敛矛盾。因此

$$S_n \rightarrow +\infty.$$

又

$$S_{n+1} = S_n + x_{n+1}^2, \quad S_{n+1} x_{n+1} \rightarrow 1.$$

对 S_n^3 使用施笃兹定理:

$$\frac{n}{S_n^3} \sim \frac{1}{S_{n+1}^3 - S_n^3} = \frac{1}{3S_n^2 x_{n+1}^2 + 3S_n x_{n+1}^4 + x_{n+1}^6} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

这里利用 $S_{n+1}x_{n+1} \rightarrow 1$ 及 $x_{n+1} \rightarrow 0$ 。于是

$$nx_n^3 = \frac{n}{S_n^3}(x_n S_n)^3 \rightarrow \frac{1}{3}.$$

因此

$$\sqrt[3]{3nx_n^3} = \sqrt[3]{3nx_n^3} \rightarrow 1.$$

第 14 题

记 $F_c(t) = (t^2 + c)/2$, 则 $a_{n+1} = F_c(a_n)$ 。原题的参数式是一个二次动力系统; 若要求对每个实数 c 给出精确的“收敛/周期/混沌”分类, 所用工具已明显超出前两章。这里严格遵守题目限制, 给出可由单调性、夹逼和柯西准则完整证明的主要结论。

1. $c > 1$ 此时无实不动点, 因为 $t = F_c(t)$ 的判别式 $4(1 - c) < 0$ 。且 $a_1 = c/2 > 0$, 并且

$$a_2 - a_1 = \frac{c^2}{8} > 0.$$

若 $a_n \geq 0$, 则

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2 + c - 1}{2} > 0.$$

故 $\{a_n\}$ 单调递增。若它收敛到 L , 则 $L = F_c(L)$, 与无实不动点矛盾, 所以 $a_n \rightarrow +\infty$ 。

2. $-3 \leq c \leq 0$ 令

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - c}, \quad I = [c/2, 0].$$

有 $\alpha \in [-1, 0]$, 且 $F_c(\alpha) = \alpha$ 。容易检验 $F_c(I) \subset I$ (端点 $F_c(0) = c/2$ 、 $F_c(c/2) = c/2 + c^2/8 \leq 0$)。对 $u, v \in I$,

$$|F_c(u) - F_c(v)| = \frac{1}{2}|u + v||u - v| \leq \frac{3}{4}|u - v|.$$

所以 $\{a_n\}$ 以固定压缩比收敛; 极限只能是不动点 α 。

3. $0 < c \leq 1$ 此时 $a_1 = c/2 < \alpha$, 且区间 $[a_1, \alpha]$ 在 F_c 下不变。由

$$F_c(t) - t = \frac{(t - \alpha)(t - \beta)}{2} \geq 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中 $\beta = 1 + \sqrt{1 - c}$, 可知 $a_{n+1} \geq a_n$ 。数列递增且有上界 α , 故收敛。取极限得

$$\lim a_n = \alpha = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

4. 特殊值 $c = -8$ $\alpha = -2$ 、 $\beta = 4$, 而

$$a_1 = -4, \quad a_2 = 4, \quad a_n = 4 \quad (n \geq 2).$$

故收敛, 极限为 4。

对于 $c < -3$ 且 $c \neq -8$ 的其余参数, F_c 会出现周期轨道甚至更复杂的有界轨道; 例如 $c = -4$ 给出

$$-2 \mapsto 0 \mapsto -2,$$

循环而不收敛。题目若要求逐点判定全部 c , 必须借助二次映射的动力系统理论, 不能伪装成第二章的极限题。

第 15 题

不必有结论。取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = e^n \quad (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & \text{其他 } x > 0. \end{cases}$$

对固定的 $\lambda \in (0, 1)$, 等式 $n\lambda = e^m$ 至多成立一次。事实上, 若

$$n\lambda = e^m, \quad n'\lambda = e^{m'},$$

则 $e^{m-m'} = n/n'$ 是有理数。这里需要一个初等事实: 对任意非零整数 d , e^d 都是无理数。证明与第 8 题完全相同, 只须使用

$$e^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{k!}$$

并估计右端的有理尾部。于是 $m \neq m'$ 不可能, 故 $m = m'$, 从而 $n = n'$ 。因此 $f(n\lambda)$ 至多有一项等于 1, 其余都为 0, 仍有 $f(n\lambda) \rightarrow 0$ 。

但沿 $x = e^n \rightarrow +\infty$, 恒有 $f(e^n) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ 。

第 16 题

由题设, 可把

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x/2)}{x} \quad (|x| > 0)$$

延拓为 $h(0) = 0$, 于是 $h(x) \rightarrow 0$ 。对任意 $x \neq 0$, 因为 $x/2^m \rightarrow 0$, 题设给出 $f(x/2^m) \rightarrow 0$, 故

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(x/2^k) - f(x/2^{k+1})].$$

而

$$f(x/2^k) - f(x/2^{k+1}) = \frac{x}{2^k} h(x/2^k).$$

除以 x , 得

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} h(x/2^k).$$

给定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 使 $|t| < \delta$ 时 $|h(t)| < \varepsilon$ 。若 $0 < |x| < \delta$, 则右边每项的 $h(x/2^k)$ 都小于 ε , 故

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon.$$

因 ε 任意, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0$ 。

第 17 题

设 $T_f, T_g > 0$ 分别是 f, g 的周期。令

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

则 h 仍以 T_f, T_g 为周期。更具体地, $h(x + T_f) = h(x)$, 而

$$h(x + T_f - T_g) = h(x)$$

不一定是新周期; 但 h 至少有周期 T_f 。题设给出 $h(x) \rightarrow 0$ (当 $x \rightarrow \infty$)。

固定任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 。数列 $x_0 + nT_f \rightarrow +\infty$, 且

$$h(x_0 + nT_f) = h(x_0).$$

由 $h(x_0 + nT_f) \rightarrow 0$, 得到 $h(x_0) = 0$ 。由于 x_0 任意, $h \equiv 0$, 即 $f \equiv g$ 。