

数学分析（上册） 第三章 连续函数

课后习题参考答案

依据习题册《第三章 连续函数》整理 · 2026 年 10 月

解法范围：只使用数列与函数的极限、连续性、介值定理、闭区间上连续函数的最值定理和有界性定理、单调函数的基本性质。不使用导数、微分中值定理、洛必达法则或泰勒展开。

阅读说明

文中“连续”均指在所讨论点附近有定义且 $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ 。间断点分类采用：

- 两个单侧极限都存在时为第一类间断点；其中相等时称可去间断点，不等时称跳跃间断点。
- 至少一个单侧极限不存在或为无穷大时为第二类间断点。

原册 B 组第 2 题在闭区间 $[a, b]$ 上同时假定“连续”和“无上界”；这与连续函数在闭区间上有界定理矛盾。本文会如实指出该条件不能同时成立，而不把矛盾题面强行解释成另一个命题。

练习 3.1

第 1 题

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1.$$

当 $x \rightarrow 0^-$ 时,

$$f(x) = \frac{\sin x}{-x} \rightarrow -1.$$

两个单侧极限分别是 1 与 -1, 不相等, 所以 $x = 0$ 是跳跃间断点, 函数在 0 不连续。

(2) 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $1/(x-1) \rightarrow -\infty$, 故

$$\frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}} \rightarrow 1.$$

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $1/(x-1) \rightarrow +\infty$, 故

$$\frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}} \rightarrow 0.$$

而 $f(1) = 1$ 。因此函数在 1 左连续但右不连续; 1 是跳跃间断点。

第 2 题

由条件取 $x = 0$, 得

$$|f(0)| \leq 0,$$

故 $f(0) = 0$ 。对任意 $x \in [-1, 1]$,

$$0 \leq |f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|.$$

由夹逼原理,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

所以 f 在 0 连续。

第 3 题

记狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

有理数和无理数在任意非空开区间内都稠密, 因此 D 在每一点都间断。

(1) 取

$$f(x) = (x - a)D(x).$$

在 $x = a$ 处 $|f(x)| \leq |x - a| \rightarrow 0 = f(a)$, 所以连续。若 $x \neq a$, 取有理数列与无理数列都趋于 x , 相应的 f 值分别趋于 $x - a$ 与 0 , 二者不同, 故不连续。

(2) 取

$$f(x) = (x - a)(x - b)D(x).$$

同理, 函数只在两个零点 a, b 连续, 在其余点间断。

(3) 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $|f(x)| \equiv 1$ 连续; 但无论 x 是有理点还是无理点, 其任意邻域内函数值既有 1 又有 -1 , 故 f 在每一点都不连续。

(4) 定义

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*), \\ 0, & \text{其他 } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

在每个 $1/n$ 处, 函数值为 $1/n$, 而邻域内其他点的值都是 0 , 所以不连续。若 $x \neq 0$ 且 $x \notin \{1/n\}$, 则 x 与集合 $\{1/n\}$ 有正距离, 函数在 x 的某邻域内恒为 0 , 故连续。又 $f(0) = 0$, 且 $f(1/n) = 1/n \rightarrow 0$, 所以 f 在 0 也连续。因此间断点恰为 $1, 1/2, \dots$ 。

(5) 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*), \\ 0, & \text{其他 } x. \end{cases}$$

它在各 $1/n$ 处的情况与上题相同; 在 0 处, $f(1/n) = 1/n \rightarrow 0 \neq 1 = f(0)$, 所以 0 间断, 而且是第一类间断点。其余点仍连续。

(6) 定义 $G(x) = 1$ ($x \leq 0$), $G(x) = \sin(\pi/x)$ ($x > 0$), 并令

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{xG(x)}, & x > 0, x \neq \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*), \\ 0, & x \leq 0 \text{ 或 } x = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $|f(x)| \leq |x| \rightarrow 0$, 故在 0 连续。若 $x > 0$ 且 $x \neq 1/n$, 则 $xG(x) \neq 0$, 函数连续。若 $x \rightarrow 1/n$, 则

$$xG(x) = x \sin \frac{\pi}{x} \sim (-1)^{n+1} \pi n \left(x - \frac{1}{n} \right),$$

其倒数在两侧趋于 $+\infty$ 和 $-\infty$, 故正弦因子不断取 ± 1 ; 两个单侧极限都不存在。因此每个 $1/n$ 都是第二类间断点。

练习 3.2

第 1 题

(1) 和 $f + g$ 必定不连续；否则

$$g = (f + g) - f$$

也连续，矛盾。

积不一定。例如 $f \equiv 0$ 连续， $g = D$ 在 x_0 间断，但 $fg \equiv 0$ 连续。

(2) 两者都不一定。取 D 为狄利克雷函数：

- $f = g = D$ ：则 $f + g = 2D$ 、 $fg = D$ 都间断；
- $f = D$, $g = 1 - D$ ：两者都间断，但 $f + g \equiv 1$ 、 $fg \equiv 0$ 都连续。

(3) 设 f 在 x_0 是第一类间断点。则 f 的两个单侧极限都有限；而 g 的第二类间断性意味着至少有一个单侧极限不存在或为无穷大。把 f 与 g 相加时，该侧的这一性质保留，所以 $f + g$ 必定仍以 x_0 为第二类间断点。

积不一定。例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

f 在 0 为跳跃间断， g 在 0 左侧无界，故为第二类间断；但

$$f(x)g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

在 0 连续。

第 2 题

连续函数在一个点处有极限，所以

$$\varphi(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2},$$

$$\psi(x) = \min(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

由连续函数的和、差、复合及绝对值的连续性， φ, ψ 都在 I 上连续。

练习 3.3

第 1 题

(1)

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}.$$

在 $x=1$ 的去心邻域内 $f(x) = (x+1)/(x-2)$, 极限为 -2 , 故 $x=1$ 是可去间断点。 $x=2$ 处分子趋于 3、分母趋于 0, 两侧均出现无穷大, 故为第二类间断点。

(2) $\operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$ 在

$$x=0, \quad x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

处不连续。当 $x = 1/k$ 时, 正弦在两侧异号, 故符号发生跳跃; 在 $x=0$ 的任意单侧邻域内正弦不断变号, 故极限不存在。因此这些点中除 0 外的点都是跳跃间断点, 0 是第二类间断点。

(3) 有理点取 $\sin \pi x$, 无理点取 0。

当 $x \in \mathbb{Z}$ 时, $\sin \pi x = 0$, 且

$$0 \leq |f(x)| \leq |\sin \pi x| \rightarrow 0,$$

故在一切整数点连续。

若 $x \notin \mathbb{Z}$, 则 $\sin \pi x \neq 0$ 。有理点与无理点都可任意接近 x , 相应的函数值分别趋于 $\sin \pi x$ 与 0, 故极限不存在。因此所有非整数点都是第二类间断点。

(4) 当 $|x| < 1$ 时函数为 $\cos(\pi x/2)$, 连续; 当 $x > 1$ 或 $x < -1$ 时为 $|x-1|$, 也连续。

在 $x=1$ 处,

$$f(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} |x-1| = 0,$$

所以连续。

在 $x=-1$ 处,

$$f(-1) = \cos(-\pi/2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} |x-1| = 2.$$

左右极限不等, 故 $x=-1$ 是跳跃间断点。

第 2 题

(1) 记

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x + \alpha_k), \quad u_x = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_k}{x}\right) - 1.$$

则 $u_x \rightarrow 0$, 且

$$x u_x = x \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha_k}{x}\right) - 1 \right] \rightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

因为 $((1+u)^{1/n} - 1)/u \rightarrow 1/n$, 所求极限为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x((1+u_x)^{1/n} - 1) = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}.$$

(2) 由和差化积,

$$\tan x - \tan a = \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a}.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a.$$

(3) 当 x 充分接近 0 时, 令

$$U_x = \frac{x}{1 + a(a+x)}.$$

由反正切差公式,

$$\arctan(a+x) - \arctan a = \arctan U_x.$$

又 $U_x/x \rightarrow 1/(1+a^2)$ 且 $\arctan u/u \rightarrow 1$, 于是

$$\frac{\arctan(a+x) - \arctan a}{x} \rightarrow \frac{1}{1+a^2}.$$

(4) 令 $u = x/(x+1)$ 。利用

$$\frac{\pi}{4} - \arctan u = \arctan \frac{1-u}{1+u} \quad (u > -1),$$

有

$$x \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{x+1} \right) = x \arctan \frac{1}{2x+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(5) 令 $t = x - a$, 则

$$\frac{\sin(a+t)}{\sin a} = 1 + \cot a \sin t + \frac{\cos t - 1}{\sin a}.$$

右端减去 1 再除以 t 趋于 $\cot a$ 。由 $\ln(1+u)/u \rightarrow 1$, 原极限的对数为

$$\frac{1}{t} \ln \frac{\sin(a+t)}{\sin a} \rightarrow \cot a,$$

故原极限为 $e^{\cot a}$ 。

(6) 令 $t = 1/x$ 。因

$$\sin t + \cos t = 1 + t + o(t),$$

有

$$x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln(1+t+o(t))}{t} \rightarrow 1,$$

所以极限为 e 。

(7) 记

$$L = \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}.$$

利用 $(a^x - 1)/x \rightarrow \ln a$ 及其对 b, c 的同类极限,

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} = 1 + xL + o(x).$$

取对数再除以 x , 得到

$$\frac{1}{x} \ln \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \rightarrow L,$$

故原极限为 $e^L = \sqrt[3]{abc}$ 。

(8) 令 $t = 1/x \rightarrow 0^+$, 则

$$\left(2a^{1/x} - 1 \right)^x = \left(2a^t - 1 \right)^{1/t}.$$

由 $(a^t - 1)/t \rightarrow \ln a$,

$$2a^t - 1 = 1 + 2t \ln a + o(t),$$

故对数的极限为 $2 \ln a$, 原极限为 a^2 。

(9) 记

$$Q_x = \frac{a^x - 1}{(a - 1)x}.$$

若 $a > 1$, 则

$$\frac{1}{x} \ln Q_x = \ln a + \frac{\ln(1 - a^{-x})}{x} - \frac{\ln((a - 1)x)}{x} \rightarrow \ln a,$$

所以 $Q_x^{1/x} \rightarrow a$.

若 $0 < a < 1$, 则分子、分母同时为负, 且

$$Q_x = \frac{1 - a^x}{(1 - a)x}.$$

其对数除以 x 趋于 0, 所以 $Q_x^{1/x} \rightarrow 1$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^x - 1}{(a - 1)x} \right]^{1/x} = \begin{cases} a, & a > 1, \\ 1, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

(10) 当 $u \rightarrow 0$ 时,

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u).$$

于是

$$\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{9} + o(x), \quad \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}} = 1 + \frac{x}{16} + o(x),$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{4} + o(x).$$

所以原极限为

$$\frac{1/9 - 1/16}{1/4} = \frac{7}{36}.$$

练习 3.4

第 1 题

令

$$m = \min_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

由闭区间上连续函数的最值定理, 这个最小值存在, 并在某点 $x_0 \in [a, b]$ 取得。

若 $m > 0$, 题设给出一点 $y \in [a, b]$, 使

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{m}{2} < m,$$

与 m 的最小性矛盾。因此 $m = 0$ 。即存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$|f(\xi)| = 0,$$

从而 $f(\xi) = 0$ 。

第 2 题

因

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A < \eta,$$

存在 x_1 , 使

$$f(x_1) < \eta.$$

同理, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B > \eta,$$

存在 $x_2 \in (x_1, +\infty)$, 使

$$f(x_2) > \eta.$$

函数 f 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 且 η 介于端点函数值之间。由介值定理, 存在

$$\xi \in (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$$

使 $f(\xi) = \eta$ 。

第 3 题

令

$$m = \min\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}, \quad M = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

记

$$C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

显然

$$m \leq C \leq M.$$

函数 f 在 $[x_1, x_n]$ 上连续。由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$ 使

$$f(\xi) = C = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

习题 3 (A 组)

第 1 题

任取 $x_0 \in (a, b)$ 。题设保证 x_0 不是第二类间断点, 所以

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad R = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

都存在且有限。

由中点凸性,

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \leq \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{2}.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 利用右极限存在, 得

$$R \leq \frac{R + f(x_0)}{2},$$

故 $R \leq f(x_0)$ 。同理, 把 $x_0 - h$ 代入中点不等式, 并令 $h \rightarrow 0^+$, 得

$$L \leq f(x_0).$$

再取关于 x_0 对称的两点 $x_0 \pm h$ 。其中点恰为 x_0 , 故

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h)}{2}.$$

令 $h \rightarrow 0^+$, 得到

$$f(x_0) \leq \frac{L + R}{2}.$$

由于 $L \leq f(x_0)$ 、 $R \leq f(x_0)$, 只能是

$$L = R = f(x_0).$$

左、右极限都等于函数值, 因此 f 在 x_0 连续。由 x_0 任意, f 在 (a, b) 连续。

第 2 题

不妨设 f 递增; 递减时把全部不等号反向。

先看内点 $x_0 \in (a, b)$ 。因 f 递增, 左、右极限

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad R = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

存在, 且 $L \leq f(x_0) \leq R$ 。

若 $L < f(x_0)$, 任取 $\eta \in (L, f(x_0))$ 。由题设存在 ξ 使 $f(\xi) = \eta$ 。由于 $\xi \geq x_0$ 会推出 $f(\xi) \geq f(x_0)$, 只能 $\xi < x_0$ 。因此

$$\sup_{a < x < x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

但左极限正是这个上确界, 故 $L \geq f(x_0)$ 。结合 $L \leq f(x_0)$, 得到 $L = f(x_0)$ 。同理 $R = f(x_0)$ 。

在端点 a 处, 右极限存在且不小于 $f(a)$ 。若严格大于, 则取介于二者之间的值 η , 其原像只能在 a 右侧, 重复上述逼近论证会迫使右极限等于 $f(a)$ 。对端点 b 同理。故 f 在 $[a, b]$ 连续。

第 3 题

(1) 先由

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

得 $f(0) = 0$ 。对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 由可加性,

$$f(x) - f(x_0) = f(x - x_0).$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $x - x_0 \rightarrow 0$ 。函数在 0 连续且 $f(0) = 0$, 故

$$f(x - x_0) \rightarrow 0.$$

于是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$, 即 f 在任意 x_0 连续。

(2) 令 $a = f(1)$ 。由可加性及归纳法, 对每个整数 m ,

$$f(m) = ma.$$

对有理数 $r = p/q$ (整数 p , 正整数 q),

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pa,$$

故 $f(r) = ra$ 。

任取实数 x , 取有理数列 $r_n \rightarrow x$ 。由第 (1) 小题的连续性,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ar_n = ax.$$

第 4 题

固定 $x > 0$ 。反复使用 $f(u^2) = f(u)$,

$$f(x) = f(x^{1/2}) = f(x^{1/4}) = \cdots = f(x^{1/2^n}).$$

由于 $x^{1/2^n} \rightarrow 1$, 而 f 在 1 连续,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

这与 x 无关, 所以 f 恒等于常数 $f(1)$ 。

第 5 题

由 f 在闭区间连续, $m(x), M(x)$ 都有定义。先证 m 连续。

设 $a \leq x < y \leq b$ 。因为 $[a, x] \subset [a, y]$,

$$m(y) \leq m(x).$$

若 $m(y) = m(x)$, 则差为 0。若 $m(y) < m(x)$, 则最小值必在 $(x, y]$ 上取得, 故存在 $s \in [x, y]$ 使 $m(y) = f(s)$ 。又 $m(x) \leq f(x)$, 于是

$$0 \leq m(x) - m(y) \leq f(x) - f(s).$$

所以

$$|m(x) - m(y)| \leq |f(x) - f(s)|.$$

由于 $|x - s| \leq |y - x|$ 且 f 在一点处连续, 当 $y \rightarrow x$ 时右端趋于 0。由此得 m 的右连续性; 把 x, y 交换方向即得左连续性。故 m 连续。

对 $M(x)$ 同理: $M(x) \leq M(y)$; 若严格增大, 则最大值在 $[x, y]$ 上取得, 并且

$$0 \leq M(y) - M(x) \leq f(s) - f(x).$$

于是 $|M(x) - M(y)| \leq \sup_{|s-x| \leq |y-x|} |f(s) - f(x)| \rightarrow 0$ 。故 M 连续。

第 6 题

令

$$g(x) = f(x) - x.$$

由 $f(a) \in [a, b]$ 和 $f(b) \in [a, b]$,

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \quad g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

g 在 $[a, b]$ 上连续。由介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$ 。

第 7 题

固定正整数 n , 定义

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

g 连续。并且

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = f(1) - f(0) = 0.$$

若某个 $g(k/n) = 0$, 结论已成立。否则这 n 个数中既有正项也有负项, 于是存在相邻的两个横坐标处 g 异号。由介值定理, 存在 x_n 使 $g(x_n) = 0$ 。所以

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

第 8 题

令 $T > 0$ 是 f 的一个周期, 并设

$$g(x) = f(x+1) - f(x).$$

g 连续且以 T 为周期。因为连续周期函数在 $\mathbb{R}$ 上取得最大值和最小值, g 的图像不可能恒正或恒负: 若 $g > 0$, 在 f 的最大值点 ξ 处,

$$f(\xi+1) > f(\xi),$$

与 ξ 为最大值点矛盾; 若 $g < 0$, 在最小值点处同样矛盾。由于 g 连续且定义域连通, g 若没有零点就只能保持同一符号。因此 g 有零点, 即存在 ξ 使 $f(\xi+1) = f(\xi)$ 。

第 9 题

(1) 不存在。证明如下。

反设存在这样的连续函数。任取一个值 c 及其两个原像 $x_1 < x_2$ 。因为 f 取到任意大的值, 可在 x_1, x_2 之外 (或延拓所取区间) 选到 d 使 $f(d) > c$ 。在包含 x_1, d 的闭区间上, f 取得最大值 $M > c$; 取最大值点为 y , 可使其位于区间内部。于是 y 是局部最大值点。值 M 恰有两个原像 y, z 。

在 y 的两侧, 函数值略小于 M 的点分别出现在 y 左右; 而 z 不可能是局部最大值, 否则略小于 M 的值会有至少四点。于是 z 必须是局部最小值。设 $y < z$ 。取足够小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$f(y+\varepsilon) < M, \quad f(z-\varepsilon) > M.$$

由介值定理, $(y+\varepsilon, z-\varepsilon)$ 内还有一点取值为 M 。连同 y, z 已有三个原像, 矛盾。

故 (1) 不存在。

(2) 存在。 例如定义

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3[x], & [x] \text{ 为偶数,} \\ 3[x] + 3 - 2x, & [x] \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

在相邻整数之间, 每段都是线性的, 并且在整数处拼接连续。图形每两个单位重复一次基本“顶点—谷点”的叠置形状: 一个递减段的取值范围恰好覆盖两侧递增段的重叠部分。因此任一水平直线

$$y = c$$

都依次穿过一个递增段、一个递减段和下一个递增段, 且各有且仅有一个交点。所以对每个 $c \in \mathbb{R}$, 方程 $f(x) = c$ 恰有三个解。

第 10 题

(1) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 取 $X > a$, 使 $x \geq X$ 时

$$|f(x)| \leq |A| + 1.$$

又 f 在闭区间 $[a, X]$ 上连续, 故有界, 设 $|f(x)| \leq M$ 。取 $K = \max\{M, |A| + 1\}$, 则 f 在 $[a, +\infty)$ 上有界。

(2) 若存在 $x_0 \geq a$ 使 $f(x_0) > A$, 取

$$\varepsilon = \frac{f(x_0) - A}{2}.$$

由于 $f(x) \rightarrow A$, 存在充分大的 $X > x_0$, 使 $x \geq X$ 时 $f(x) < A + \varepsilon < f(x_0)$ 。于是 $f|_{[a, X]}$ 的最大值就是整个 $[a, +\infty)$ 上的最大值。

若没有 $f(x) > A$ 的点, 但存在 x_0 使 $f(x_0) < A$, 取

$$\varepsilon = \frac{A - f(x_0)}{2}.$$

当 X 充分大且 $x \geq X$ 时, $f(x) > A - \varepsilon > f(x_0)$, 于是 $f|_{[a, X]}$ 的最小值就是整个定义域上的最小值。

若对每个 x 都有 $f(x) = A$, 则最大值和最小值都存在。综上所述, f 至少在 $[a, +\infty)$ 上取得最大值与最小值中的一个。

习题 3 (B 组)

第 1 题

对每个 $x_0 \in I$, 题设保证极限

$$g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$$

存在。任给 $\varepsilon > 0$ 。由上式, 存在 $\delta > 0$, 使

$$0 < |t - x_0| < \delta \implies |f(t) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取 $x \neq x_0$ 且 $|x - x_0| < \delta/2$ 。由 $g(x)$ 的定义, 可取 t 充分接近 x , 同时满足

$$0 < |t - x_0| < \delta, \quad |f(t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

例如可取 $|t - x| < \min\{\delta/2, |x - x_0|/2\}$ 。于是

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x) - f(t)| + |f(t) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

故 g 在任意 x_0 连续。

第 2 题

按题面所写, 这样的函数不存在。因为 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的有界性定理, f 必定有上界; 这与题设“ f 在 $[a, b]$ 上无上界”矛盾。因此该题的假设不能同时成立, 结论只能作空真陈述。

若题目原意是“ f 在 $[a, +\infty)$ 上连续且无上界”, 则结论仍需附加条件; 不能仅由“任一开区间内不取最小值”推出严格递增。例如递减函数在开区间内也常常取不到最小值。建议以原教材校对后的题面为准。

第 3 题

由 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 函数 f 在紧集上取得全局最小值。设最小值为

$$m = f(a).$$

由 $f(a) < a$ 可知 $m < a$ 。

先看 $f(f(x))$ 的可能值。因为 f 连续且两端趋于 $+\infty$, 它的值域是

$$[m, +\infty).$$

在 $[m, +\infty)$ 上, f 的最小值是 m , 并在 $x = a$ 处取到。故

$$f(f(x)) \geq m,$$

并且只要 $f(x) = a$, 就有

$$f(f(x)) = f(a) = m.$$

由于 $f(a) = m < a$, 而 $f(x) \rightarrow +\infty$ (当 $|x| \rightarrow +\infty$), 分别取充分小的 $L < a$ 和充分大的 $R > a$, 有

$$f(L) > a, \quad f(a) < a, \quad f(R) > a.$$

由介值定理, 在 (L, a) 与 (a, R) 内各有一点使 $f(x) = a$ 。这两个点不同, 因此 $f(f(x))$ 至少在两个点取得最小值 m 。

第 4 题

由

$$f(f(x)) = x$$

可知 f 是单射: 若 $f(x) = f(y)$, 再作用一次 f , 得 $x = y$ 。闭区间上的连续单射必严格单调。又 $f(0) = 0 < f(1) = 1$, 所以 f 严格递增。

固定 $x \in [0, 1]$ 。若 $f(x) > x$, 由严格递增性,

$$x = f(f(x)) \geq f(x),$$

矛盾。若 $f(x) < x$, 则

$$x = f(f(x)) \leq f(x),$$

仍矛盾。因此 $f(x) = x$ 。

第 5 题

不存在。

反设存在这样的连续函数 f 。在有理点 q 处, $f(q)$ 是无理数; 在无理点 t 处, $f(t)$ 是有理数。由于 $\mathbb{Q}$ 可数, $\{f(q) : q \in \mathbb{Q}\}$ 可数; 无理点上的函数值都属于 $\mathbb{Q}$, 也只有可数个不同值。因此 $f(\mathbb{R})$ 是可数集。

然而, f 连续而 $\mathbb{R}$ 连通, 故 $f(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 中的连通集, 也就是区间。若该区间至少含两个点, 它必含不可数多个点, 与上面的可数性矛盾。因此 f 必为常数。

但常数值若为有理数, 则在有理点处取到了有理数; 若为无理数, 则在无理点处取到了无理数, 均与题设矛盾。故不存在。

第 6 题

设 $|f(x)| \leq M$ 。固定 $c > 0$, 考虑

$$h(x) = f(x+c) - f(x).$$

反设不存在趋于 $+\infty$ 的 x_n 使 $h(x_n) \rightarrow 0$ 。则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $X > 0$, 使 $x \geq X$ 时

$$|h(x)| \geq \varepsilon.$$

由于 h 连续, 它在区间 $[X, +\infty)$ 上不能变号 (否则由介值定理会产生 $h = 0$), 所以 h 在 $[X, +\infty)$ 上恒正或恒负。

若 $h(x) \geq \varepsilon$ 对一切 $x \geq X$ 成立, 则取 $x_0 \geq X$ 和整数 N ,

$$f(x_0 + Nc) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} h(x_0 + kc) \geq N\varepsilon,$$

这与 $|f| \leq M$ 矛盾。恒负情形同理。因此 $h(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时不可能远离 0, 于是可逐次取 $x_n > n$ 使

$$|f(x_n + c) - f(x_n)| < \frac{1}{n}.$$

所得 $x_n \rightarrow +\infty$, 且题中极限为 0。

第 7 题

证明一个“整数弦引理”, 再作归纳。

引理: 若 F 在 $[0, m]$ 连续且 $F(0) = F(m)$, 则至少存在 $x \in [0, m-1]$, 使

$$F(x) = F(x+1).$$

证明: 设 $H(x) = F(x+1) - F(x)$, $0 \leq x \leq m-1$ 。若 H 没有零点, 则由连续性, H 恒正或恒负。若恒正, 则

$$F(1) > F(0), F(2) > F(1), \dots, F(m) > F(m-1),$$

相加得 $F(m) > F(0)$, 矛盾; 恒负同理。故 H 有零点。

现在对题中 n 作归纳。 $n = 1$ 时 $(1, 0)$ 即为所求。

设结论对 $n-1$ 成立。由引理, 取 $x \in [0, n-1]$ 使

$$f(x) = f(x+1).$$

定义映射

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq x, \\ t+1, & x < t \leq n-1, \end{cases}$$

并令

$$g(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in [0, n-1].$$

由 $g(x) = f(x) = f(x+1) = \lim_{t \rightarrow x^+} g(t)$, g 在 x 连续; 其他位置显然连续。又 $g(0) = f(0) = f(n)$ 。当 $x < n-1$ 时 $g(n-1) = f(n)$; 当 $x = n-1$ 时, 由所选零点有 $g(n-1) = f(n-1) = f(n)$ 。总之

$$g(0) = g(n-1).$$

由归纳假设, 存在 $n-1$ 对不同的 (u_j, v_j) , 满足

$$u_j - v_j \in \mathbb{N}^*, \quad g(u_j) = g(v_j).$$

因为 φ 是单射, $(\varphi(u_j), \varphi(v_j))$ 是 f 的 $n-1$ 对不同数对, 并且

$$\varphi(u_j) - \varphi(v_j) \in \mathbb{N}^*.$$

再补上由引理得到的

$$(x+1, x),$$

它与上面的 $n-1$ 对不同, 因为 $x+1$ 不在 $\varphi([0, n-1])$ 中。故至少有 n 对。