

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第一至五章

课后习题合集

_____ 一题一页 · 共 262 题

答案与提示统一置于全册末尾

A4 · 黑白排版

据谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边编《数学分析习题课讲义（第 2 版）》上册整理

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第 1 章

引论

课后习题

§1.3.2 练习题 · 共 8 题

一题一页 · 题后留空

§1.3.2 练习题

第 1 题

关于 Bernoulli 不等式的推广：

(1) 证明：当 $-2 \leq h \leq -1$ 时，Bernoulli 不等式

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

仍成立；

(2) 证明：当 $h \geq 0$ 时成立不等式

$$(1+h)^n \geq \frac{n(n-1)h^2}{2},$$

并推广之；

(3) 证明：若 $a_i > -1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 且同号，则成立不等式

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

§1.3.2 练习题

第 2 题

阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现, 以下是几个有关的不等式, 它们都可以从平均值不等式得到:

(1) 证明: 当 $n > 1$ 时成立

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n;$$

(2) 利用

$$(n!)^2 = (n \cdot 1)[(n-1) \cdot 2] \cdots (1 \cdot n)$$

证明: 当 $n > 1$ 时成立

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n;$$

(3) 比较 (1) 和 (2) 中两个不等式的优劣, 并说明原因;

(4) 证明: 对任意实数 r 成立

$$(n!)^r \leq \frac{1}{n^n} \left(\sum_{k=1}^n k^r\right)^n.$$

§1.3.2 练习题

第 3 题

证明几何平均值-调和平均值不等式：若 $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，则

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

§1.3.2 练习题

第 4 题

证明：当 a, b, c 为非负数时成立

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

这个结果还可以推广到 n 个非负数的情况。

§1.3.2 练习题

第 5 题

证明下列不等式：

(1)

$$|a - b| \geq ||a| - |b|| \quad \text{和} \quad |a - b| \geq |a| - |b|;$$

(2)

$$|a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|;$$

又问：左边可否为 $\left| |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \right|$ ？

(3)

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|};$$

(4)

$$|(a + b)^n - a^n| \leq (|a| + |b|)^n - |a|^n.$$

§1.3.2 练习题

第 6 题

试按下列提示, 给出 Cauchy 不等式的几个不同证明:

(1) 用数学归纳法;

(2) 用 Lagrange 恒等式

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (|a_k||b_i| - |a_i||b_k|)^2;$$

(3) 用不等式

$$|AB| \leq \frac{A^2 + B^2}{2};$$

(4) 构造复的辅助数列

$$c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

再利用

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

§1.3.2 练习题

第 7 题

用向前-向后数学归纳法证明：设 $0 < x_i \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right]^n}.$$

§1.3.2 练习题

第 8 题

设 a, c, g, t 均为非负数, $a + c + g + t = 1$, 证明

$$a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geq \frac{1}{4},$$

且其中等号成立的充分必要条件是

$$a = c = g = t = \frac{1}{4}.$$

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第 2 章

数列极限

课后习题

思考题、练习题与参考题 · 共 93 题

一题一页 · 题后留空

2.1.2 思考题

第 1 题

数列收敛有很多等价定义。例如：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n \geq N, \quad |a_n - a| < \varepsilon;$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ，当且仅当

$$\forall m \in \mathbb{N}_+, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \quad |a_n - a| < \frac{1}{m};$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ，当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \quad |a_n - a| < K\varepsilon,$$

其中 K 是一个与 ε 和 n 无关的正常数。

试证明以上定义与上一小节列出的定义的等价性。

2.1.2 思考题

第 2 题

问：在数列收敛的定义中， N 是否是 ε 的函数？

2.1.2 思考题

第 3 题

判断正确与否：若 $\{a_n\}$ 收敛，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

2.1.2 思考题

第 4 题

设收敛数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数。问：该数列有什么特殊性质？

2.1.5 练习题

第 1 题

按极限定义证明：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n)^{1/n} = 1;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0)。$$

2.1.5 练习题

第 2 题

设 $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

2.1.5 练习题

第 3 题

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

反之如何?

2.1.5 练习题

第 4 题

下面一组题在本章的许多极限计算中有用，并与第五章的连续性概念有关：

- (1) 设 $p(x)$ 是 x 的多项式。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = p(a);$$

- (2) 设 $b > 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^a;$$

- (3) 设 $b > 0$ ， $\{a_n\}$ 为正数列， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b a_n = \log_b a;$$

- (4) 设 b 为实数， $\{a_n\}$ 为正数列， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^b = a^b;$$

- (5) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n = \sin a.$$

例如，若 $b > 0$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{1/n} = 1$ ，它是第 (2) 题的特例。

2.1.5 练习题

第 5 题

设 $a > 1$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

(可以利用已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。)

2.2.1 思考题

第 1 题

设 $\{a_n\}$ 收敛而 $\{b_n\}$ 发散。问：数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何？

2.2.1 思考题

第 2 题

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散。问：数列 $\{a_n + b_n\}$ 和 $\{a_nb_n\}$ 的敛散性如何？

2.2.1 思考题

第 3 题

设 $a_n \leq b_n \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0.$$

问：数列 $\{b_n\}$ 是否收敛？

2.2.1 思考题

第 4 题

找出下列运算中的错误:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

2.2.1 思考题

第 5 题

设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a ，又对每个 n 有 $b < a_n < c$ 。问：是否成立 $b < a < c$ ？

2.2.1 思考题

第 6 题

设已知 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 又有 $b \leq a \leq c$ 。问: 是否存在 N , 使得当 $n > N$ 时成立 $b \leq a_n \leq c$?

2.2.1 思考题

第 7 题

设已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。问：是否有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n) = 0?$$

又问：反之如何？

2.2.4 练习题

第 1 题

证明: $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限。

2.2.4 练习题

第 2 题

以下是可以应用夹逼定理的几个题：

- (1) 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \dots, a_p$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n};$$

- (2) 设

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

- (3) 设

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

- (4) 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 并且已知它收敛于 $a > 0$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

2.2.4 练习题

第 3 题

求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^n}), \text{ 其中 } |x| < 1;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right];$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+\nu)}, \text{ 其中 } \nu \text{ 为正整数}.$$

最后两个题是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

的推广。

2.3.2 练习题

第 1 题

证明：若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{|x_n|\}$ 至少从某项开始后单调。又问：反之如何？

2.3.2 练习题

第 2 题

设 $\{a_n\}$ 单调增加, $\{b_n\}$ 单调减少, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且极限相等。

2.3.2 练习题

第 3 题

按照极限的定义证明：单调增加有上界的数列的极限不小于数列的任何一项；单调减少
有下界的数列的极限不大于数列的任何一项。

2.3.2 练习题

第 4 题

设

$$x_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{n+1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

求数列 $\{x_n\}$ 的极限。

2.3.2 练习题

第 5 题

设

$$a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

求数列 $\{a_n\}$ 的极限。

2.3.2 练习题

第 6 题

在例题 2.2.6 的基础上证明：当 $p > 1$ 时，数列 $\{S_n\}$ 收敛，其中

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

2.3.2 练习题

第 7 题

设 $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_n = \sin x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 。证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

2.3.2 练习题

第 8 题

设

$$a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

证明: $\{a_n\}$ 收敛于 0。

(观察

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right) \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \right) \cdots \left[\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \right] \left[\frac{2n-1}{(2n)^2} \right].$$

)

2.3.2 练习题

第 9 题

设

$$a_n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

证明: $\{a_n\}$ 收敛。

(方法与上一题类似。在学了积分学后将于命题 11.4.1 中求出上述数列的极限为 $\frac{\pi}{2}$ 。这就是 Wallis 公式。)

2.3.2 练习题

第 10 题

下列数列中，哪些是单调的：

$$(1) \left\{ \frac{1}{1+n^2} \right\}; \quad (2) \{\sin n\}; \quad (3) \{\sqrt[n]{n!}\}.$$

2.3.2 练习题

第 11 题

证明：单调数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它有一个收敛子列。

2.3.2 练习题

第 12 题

对每个正整数 n ，用 x_n 表示方程

$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1$$

在闭区间 $[0, 1]$ 中的根。求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

2.4.3 练习题

第 1 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

2.4.3 练习题

第 2 题

设 $\{x_n\}$ 单调增加, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛于 a 。

2.4.3 练习题

第 3 题

设 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于 a , $\{a_{2k}\}$ 收敛于 b , 且 $a \neq b$. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(注意: 虽然数列 $\{a_n\}$ 可能发散, 但前 n 项的算术平均值所成的数列仍可以有极限。一个典型例子就是 $\{(-1)^n\}$ 。)

2.4.3 练习题

第 4 题

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d.$$

(本题可以看作 Cauchy 命题的另一种形式, 也很有用。)

2.4.3 练习题

第 5 题

设 $\{a_n\}$ 为正数列，且收敛于 A 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = A.$$

(本题与 Cauchy 命题的关系是明显的。)

2.4.3 练习题

第 6 题

设 $\{a_n\}$ 为正数列, 且存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

(本题对类型为 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 的极限问题很有用, 是例题 2.1.2 的一个发展; 这个结果在无穷级数的研究中也很重要。)

2.4.3 练习题

第 7 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0.$$

2.4.3 练习题

第 8 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

(本题是 1970 年的 Putnam 竞赛题；若没有题 7 的铺垫，该如何做?)

2.4.3 练习题

第 9 题

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0 < a_1 < 1$ 和

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n) \quad (n \geq 1).$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1.$$

2.4.3 练习题

第 10 题

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = \alpha \beta.$$

2.5.5 练习题

第 1 题

计算下列极限：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

2.5.5 练习题

第 2 题

设 $k \in \mathbb{N}_+$ 。证明

$$\frac{k}{n+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) < \frac{k}{n}.$$

2.5.5 练习题

第 3 题

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

2.5.5 练习题

第 4 题

设 $\{p_n\}$ 是正数列, 且 $p_n \rightarrow +\infty$ 。计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}.$$

2.5.5 练习题

第 5 题

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 2^n}{n^n}.$$

在以下各题中均可试用几何方法，或作出几何解释。

2.6.3 练习题

第 1 题

(1) 设 $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(2) 设 $a > 0$, $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

(这两题外形相似, 都可用本节方法解决。但题 (2) 有更简单的直接解法。)

2.6.3 练习题

第 2 题

设 $A > 0$, $0 < b_0 < A^{-1}$, 且

$$b_{n+1} = b_n(2 - Ab_n), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A^{-1}.$$

2.6.3 练习题

第 3 题

设参数 $b > 4$, $x_1 = \frac{1}{2}$, 且

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 发散。

2.6.3 练习题

第 4 题

设 $x_1 = b$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$ 。问: b 取何值时数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

2.6.3 练习题

第 5 题

设 $x_0 = a$, $x_n = 1 + bx_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 。试求出使该数列收敛的 a, b 的所有值。

(本题为线性迭代, 解法很多。)

2.6.3 练习题

第 6 题

设给定初始值 x_1 , 然后用线性函数 $f(x) = ax + b$ 迭代生成数列 $\{x_n\}$, 即 $x_{n+1} = ax_n + b$ 。试回答以下问题:

- (1) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1 , $\{x_n\}$ 总是收敛的?
- (2) 是否存在线性函数, 使对于任何初始值 x_1 , $\{x_n\}$ 总是发散的?
- (3) 是否存在线性函数, 使对于不同的初始值 x_1 , $\{x_n\}$ 收敛到不同极限?
- (4) 是否存在线性函数, 使对于某些初始值 x_1 , $\{x_n\}$ 收敛, 而对于其他初始值 x_1 , $\{x_n\}$ 发散?

2.6.3 练习题

第 7 题

设 $\{x_n\}$ 为正数列，且满足

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

2.6.3 练习题

第 8 题

设 $A > 0$, $x_1 > 0$, 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{A}.$$

(这是求平方根的快速算法。实际上可以得到收敛速度的估计:

$$x_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{x_n} (x_n - \sqrt{A})^2 \leq \frac{1}{\sqrt{A}} (x_n - \sqrt{A})^2.$$

因此若记 $|x_n - \sqrt{A}| = \varepsilon_n$ 为第 n 次误差, 则在 n 充分大时 $\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{\sqrt{A}} \varepsilon_n^2$ 。每迭代一次, 有效位数几乎增加一倍。)

2.7.3 第一组参考题

第 1 题

设 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛。证明: $\{a_n\}$ 收敛。

2.7.3 第一组参考题

第 2 题

设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件

$$a_n \leq a_{n+2}, \quad a_n \leq a_{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: $\{a_n\}$ 收敛。

2.7.3 第一组参考题

第 3 题

设 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n + a_{n+2}\}$ 都收敛。证明： $\{a_n\}$ 收敛。

2.7.3 第一组参考题

第 4 题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0，又存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a.$$

证明： $a \leq 1$ 。

2.7.3 第一组参考题

第 5 题

设

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

2.7.3 第一组参考题

第 6 题

用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

2.7.3 第一组参考题

第 7 题

设 $a_0, a_1, \dots, a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件

$$a_0 + a_1 + \dots + a_p = 0.$$

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \dots + a_p \sqrt{n+p} \right).$$

2.7.3 第一组参考题

第 8 题

证明：当 $0 < k < 1$ 时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^k - n^k] = 0.$$

2.7.3 第一组参考题

第 9 题

(1) 设 $\{x_n\}$ 收敛。令

$$y_n = n(x_n - x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

问: $\{y_n\}$ 是否收敛?

(2) 在上一小题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明 $\{y_n\}$ 收敛于 0。

2.7.3 第一组参考题

第 10 题

(1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0.$$

证明: $\{a_n\}$ 是正无穷大量。

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0.$$

证明: $\{a_n\}$ 无界。

2.7.3 第一组参考题

第 11 题

证明

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

其中右边的不等式当 $n \geq 6$ 时成立。

2.7.3 第一组参考题

第 12 题

证明

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

2.7.3 第一组参考题

第 13 题

(关于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) $n \geq 2$ 时成立

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 3 - \frac{1}{2!1 \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{n!(n-1)n};$$

(2)

$$e = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)!(k+1)(k+2)};$$

(3) 用

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$$

计算 e 要比不加上最后一项好得多。

2.7.3 第一组参考题

第 14 题

设

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: $\{a_n\}$ 收敛。

2.7.3 第一组参考题

第 15 题

设已知存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

2.7.3 第一组参考题

第 16 题

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} = 1.$$

2.7.3 第一组参考题

第 17 题

设对每个 n 有 $x_n < 1$ ，并且

$$(1 - x_n)x_{n+1} \geq \frac{1}{4}.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

2.7.3 第一组参考题

第 18 题

设 $a_1 = b$, $a_2 = c$, 在 $n \geq 3$ 时

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限。

2.7.3 第一组参考题

第 19 题

设 a, b, c 是三个给定的实数。令 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$ ，并以递推公式定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

求这三个数列的极限。

2.7.3 第一组参考题

第 20 题

(1) 设 $a_1 > b_1 > 0$, 且

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限。

(2) 在 $a_1 = 2\sqrt{3}$, $b_1 = 3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π 。(这里可以利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$.)

注: 本题与例题 2.3.5 完全不同。实际上这就是计算圆周率的 Archimedes (阿基米德)–刘徽方法的迭代形式, 其中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是单位圆外切和内接正多边形的半周长。

2.7.3 第二组参考题

第 1 题

设

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: $\{a_n\}$ 收敛。

2.7.3 第二组参考题

第 2 题

证明：对每个正整数 n ，成立不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{e}{2n}.$$

2.7.3 第二组参考题

第 3 题

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! e).$$

2.7.3 第二组参考题

第 4 题

记

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

用 K_n 表示使 $S_k \geq n$ 的最小下标, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}.$$

2.7.3 第二组参考题

第 5 题

设

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

2.7.3 第二组参考题

第 6 题

将二项式系数

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

的算术平均值和几何平均值分别记为 A_n 和 G_n 。证明：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 2; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}.$$

2.7.3 第二组参考题

第 7 题

设

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

数列 $\{A_n\}$ 收敛。又有一个单调增加的正数数列 $\{p_n\}$, 且为正无穷大量。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

2.7.3 第二组参考题

第 8 题

设 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) = 1.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1.$$

2.7.3 第二组参考题

第 9 题

设数列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 对每个非负整数 n 满足条件

$$u_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{n+m}^2).$$

证明：若存在有限极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n),$$

则只能是每个 $u_n = 0$ 。

2.7.3 第二组参考题

第 10 题

(Toeplitz 定理) 设对 $n, k \in \mathbb{N}_+$, 有 $t_{nk} \geq 0$, 并且

$$\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0.$$

若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 定义

$$x_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

几种变型:

(1) 将条件 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 改为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$;

(2) 不要求 t_{nk} 非负, 而将条件改为存在 $M > 0$, 使得对每个 n 成立 $|t_{n1}| + \cdots + |t_{nn}| \leq M$, 则结论对 $a = 0$ 仍成立。

2.7.3 第二组参考题

第 11 题

用 Toeplitz 定理导出 Stolz 定理。

2.7.3 第二组参考题

第 12 题

设 $0 < \lambda < 1$, $\{a_n\}$ 收敛于 a 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

2.7.3 第二组参考题

第 13 题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 并且存在常数 K , 使得

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K$$

对每个 n 成立。令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

(从本题的条件已可推出 $\lim y_n = 0$, 但可以举出例子说明仅有 $\lim x_n = \lim y_n = 0$ 不能得到 $\lim(x_1 y_n + \cdots + x_n y_1) = 0$.)

2.7.3 第二组参考题

第 14 题

设 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$ 。证明：若 $\{y_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 也收敛。

2.7.3 第二组参考题

第 15 题

由初始值 a_0 和

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

确定数列 $\{a_n\}$ 。求 a_0 的所有可能值，使得数列 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的。

2.7.3 第二组参考题

第 16 题

证明数列

$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \quad \dots$$

收敛，并求其极限。

2.7.3 第二组参考题

第 17 题

令 $y_0 \geq 2$, 且

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

设

$$S_n = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \cdots + \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n}.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

2.7.3 第二组参考题

第 18 题

设 $x_1 = c$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $n \in \mathbb{N}_+$ 。根据下面提供的函数 $f(x) = a^x$ 和 $f(f(x))$ 的单调性和不动点的知识, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。

(1) 在 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 单调增加。

- (i) 如 $a > e^{1/e}$, 则 f 无不动点。证明: 不论 c 如何, 数列 $\{x_n\}$ 总是单调增加的正无穷大量;
- (ii) 在 $a = e^{1/e}$ 时 f 恰有一个不动点。证明: 当 $c \leq e$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加收敛于 e ; 而当 $c > e$ 时, $\{x_n\}$ 是单调增加的正无穷大量;
- (iii) 如 $1 < a < e^{1/e}$, 则 f 有两个不动点。根据 $x_1 = c$ 的大小, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。

(2) 在 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 单调减少, 存在唯一不动点。

- (i) 如 $e^{-e} \leq a < 1$, 则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 只有一个不动点。证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 它的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 是具有不同单调性的单调数列;
- (ii) 如 $0 < a < e^{-e}$, 则复合函数 $f(f(x)) = a^{a^x}$ 有三个不动点。证明: 除非 $x_1 = c$ 恰好是 f 的不动点, 否则子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调收敛于不同的极限, 数列 $\{x_n\}$ 发散。

2.7.3 第二组参考题

第 19 题

设参数 $b > 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, 且

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明以下结论 (对于情况 $b > 4$ 的讨论即是 2.6.3 小节中的题 3):

- (1) 当 $0 < b \leq 1$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 0;
- (2) 当 $1 < b \leq 2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减少收敛于 $1 - \frac{1}{b}$;
- (3) 当 $2 < b \leq 3$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 并收敛于同一极限 $1 - \frac{1}{b}$;
- (4) 当 $3 < b \leq 1 + \sqrt{5}$ 时, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 具有相反的单调性, 但收敛于不同极限。

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第 3 章

实数系的基本定理

_____ 课后习题

练习题与参考题 · 共 46 题

一题一页 · 题后留空

3.1.3 练习题

第 1 题

试证明确定界的唯一性。

3.1.3 练习题

第 2 题

设对每个 $x \in A$ 成立 $x < a$ 。问：在 $\sup A < a$ 和 $\sup A \leq a$ 中哪个是对的？

3.1.3 练习题

第 3 题

设数集 A 以 β 为上界，又有数列 $\{x_n\} \subset A$ 和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta.$$

证明： $\beta = \sup A$ 。

3.1.3 练习题

第 4 题

求下列数集的上确界和下确界：

(1) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$;

(2) $\{y \mid y = x^2, x \in (-\frac{1}{2}, 1)\}$;

(3) $\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$;

(4) $\{ne^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$;

(5) $\{\arctan x \mid x \in (-\infty, +\infty)\}$;

(6) $\{(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$;

(7) $\{1 + n \sin \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ 。

3.1.3 练习题

第 5 题

证明:

$$(1) \sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\};$$

$$(2) \inf\{x_n + y_n\} \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}.$$

3.1.3 练习题

第 6 题

设有两个数集 A 和 B ，且对数集 A 中的任何一个数 x 和数集 B 中的任何一个数 y 成立不等式 $x \leq y$ 。证明

$$\sup A \leq \inf B.$$

3.1.3 练习题

第 7 题

设数集 A 有上界, 数集 $B = \{x + c \mid x \in A\}$, 其中 c 是一个常数。证明

$$\sup B = \sup A + c, \quad \inf B = \inf A + c.$$

3.2.3 练习题

第 1 题

如果数列是 $\{(-1)^n\}$ ，开始的区间是 $[-1, 1]$ 。试用例题 3.2.2 中的方法具体找出一个闭区间套和相应的收敛子列。又问：你能否用这样的方法在这个例子中找出 3 个收敛子列？

3.2.3 练习题

第 2 题

如将闭区间套定理中的闭区间套改为开区间套 $\{(a_n, b_n)\}$, 其他条件不变, 则可以举出例子说明结论不成立。

3.2.3 练习题

第 3 题

设 $\{(a_n, b_n)\}$ 为开区间套, 数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加, 数列 $\{b_n\}$ 严格单调减少, 又满足条件

$$a_n < b_n, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \neq \emptyset.$$

3.2.3 练习题

第 4 题

用闭区间套定理证明确界存在定理。

3.2.3 练习题

第 5 题

用闭区间套定理证明单调有界数列的收敛定理。

3.3.3 练习题

第 1 题

对于给定的数列 $\{x_n\}$ 和数 a ，证明：在 a 的每个邻域中有数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项的充分必要条件是， a 是数列 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限。

3.3.3 练习题

第 2 题

证明：有界数列发散的充分必要条件是存在两个收敛于不同极限值的子列。

3.3.3 练习题

第 3 题

证明：若 $\{x_n\}$ 无界，但不是无穷大量，则存在两个子列，其中一个子列收敛，另一个子列是无穷大量。

3.3.3 练习题

第 4 题

用凝聚定理证明单调有界数列的收敛定理。

3.4.5 练习题

第 1 题

满足以下条件的数列 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列？若回答“是”，请作出证明；若回答“不一定是”，请举出反例：

- (1) 对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，当 $n > N$ 时成立 $|x_n - x_N| < \varepsilon$ ；
- (2) 对所有 $n, p \in \mathbb{N}_+$ ，成立 $|x_{n+p} - x_n| \leq p/n$ ；
- (3) 对所有 $n, p \in \mathbb{N}_+$ ，成立 $|x_{n+p} - x_n| \leq p/n^2$ ；
- (4) 对每个正整数 p ，成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+p}) = 0$ 。

3.4.5 练习题

第 2 题

用对偶法则于数列收敛的 Cauchy 收敛准则，以正面方式写出数列发散的充分必要条件。

3.5.3 练习题

第 1 题

对开区间 $(0, 1)$ 构造一个开覆盖，使得它的每一个有限子集都不能覆盖 $(0, 1)$ 。

3.5.3 练习题

第 2 题

用闭区间套定理证明覆盖定理。

3.5.3 练习题

第 3 题

用覆盖定理证明闭区间套定理。

3.5.3 练习题

第 4 题

用覆盖定理证明凝聚定理。

3.5.3 练习题

第 5 题

试对于例题 3.5.2 的证明举出两个具体例子，即

- (1) 数集 A 无上界；
- (2) A 有上界，且有 $b < \xi = \sup A$ 和 $\xi \notin A$ 。

3.6.4 练习题

第 1 题

求下列数列的上极限和下极限：

$$(1) \ x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_+;$$

$$(2) \ x_n = \sin \frac{n\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}_+;$$

$$(3) \ x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}_+;$$

$$(4) \ x_n = e^{n(-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

3.6.4 练习题

第 2 题

若 $x_n \geq y_n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 证明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

3.6.4 练习题

第 3 题

对 $\{x_n\}$, 记

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

证明

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(可以看出本题的结论蕴涵了 §2.4 中的 Cauchy 命题。)

3.7.3 第一组参考题

第 1 题

证明：数列有界的充分必要条件是它的每个子列有收敛子列。

3.7.3 第一组参考题

第 2 题

证明：数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a ，使数列的每个子列有收敛于 a 的子列。

3.7.3 第一组参考题

第 3 题

证明：在有界闭区间上的无界函数一定在这个区间的某一点的每一个邻域上无界。又问：在开区间上的无界函数是否有与此类似的性质？

3.7.3 第一组参考题

第 4 题

设函数 f 在区间 (a, b) 上定义。对区间 (a, b) 的每一个点 ξ , 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap (a, b)$ 时, 如 $x < \xi$, 则 $f(x) < f(\xi)$; 如 $x > \xi$, 则 $f(x) > f(\xi)$ 。证明: 函数 f 在 (a, b) 上严格单调增加。

3.7.3 第一组参考题

第 5 题

试用上、下极限的工具证明第二章 2.4.1 小节中的 Stolz 定理。

(参考 3.6.4 小节的题 3。)

3.7.3 第一组参考题

第 6 题

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是非负数列。在以下乘积均有意义时证明：

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.\end{aligned}$$

3.7.3 第一组参考题

第 7 题

设 $\{x_n\}$ 为正数列。用上、下极限证明：若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

3.7.3 第一组参考题

第 8 题

若对于数列 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_k}\}$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}}{k} = a,$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

3.7.3 第一组参考题

第 9 题

设 $\{x_n\}$ 为正数列。证明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) \geq 1,$$

且右边的 1 为最佳值。

3.7.3 第一组参考题

第 10 题

设 $\{x_n\}$ 为正数列。证明

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} \right)^n \geq e,$$

且右边的 e 为最佳值。

3.7.3 第二组参考题

第 1 题

从确界存在定理出发,证明:对于 $\mathbb{R}$ 中的任何两个正数 a, b , 存在正整数 n , 使得 $na > b$. (这个结论常称为 Archimedes 公理或原理.)

3.7.3 第二组参考题

第 2 题

设有两个非空实数集 A 和 B ，满足条件：

- (1) $\mathbb{R} = A \cup B$;
- (2) A 中的每一个数都小于 B 中的每一个数。

证明：或者 A 有最大数而 B 无最小数，或者 B 有最小数而 A 无最大数。（这就是 Dedekind（戴德金）的连续性定理或公理，它与实数系的每一个基本定理等价。）

3.7.3 第二组参考题

第 3 题

证明：将实数 $\mathbb{R}$ 分成两个非空集合 A 和 B ，则或者 A 中有数列收敛于 B 中的点，或者 B 中有数列收敛于 A 中的点。（这个结论称为实数的连通性，它与实数系的每一个基本定理等价。）

3.7.3 第二组参考题

第 4 题

试用压缩映射原理证明数列

$$\sqrt{7}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7}}}, \quad \sqrt{7 - \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}}}, \quad \dots$$

收敛，并计算其极限。

(即用压缩映射原理重做第二章的第二组参考题 16。)

3.7.3 第二组参考题

第 5 题

设有界数列 $\{x_n\}$ 具有如下性质：对于每个数列 $\{y_n\}$ ，成立

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证明： $\{x_n\}$ 收敛。

3.7.3 第二组参考题

第 6 题

(1) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。证明: 存在无限多个 n , 成立

$$x_n < x_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

(2) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且有正下界。证明:

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1.$$

3.7.3 第二组参考题

第 7 题

设 $y_n = px_n + qx_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 其中 $|p| < |q|$ 。证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 也收敛。

3.7.3 第二组参考题

第 8 题

设 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + 2x_n) = A.$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限。

3.7.3 第二组参考题

第 9 题

设 $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}_+$ 。证明数列 $\{x_n\}$ 的极限点集合为 $[-1, 1]$ 。

3.7.3 第二组参考题

第 10 题

设 $\{x_n\}$ 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

将 $\{x_n\}$ 的下极限和上极限分别记为 l 和 L 。证明: 在区间 $[l, L]$ 中的每一个点都是数列 $\{x_n\}$ 的极限点。

(众所周知, 本题的条件与基本数列的条件差得很远, 一般来说当然不能保证数列 $\{x_n\}$ 收敛。但是 1976 年有人发现, 如果 $\{x_n\}$ 是迭代生成数列, 则从 $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ 差不多就可以推出 $\{x_n\}$ 收敛, 从而 $l = L$ 。确切内容请看第五章第二组参考题 20。)

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第 4 章

函数极限

课后习题

思考题、练习题与参考题 · 共 51 题

一题一页 · 题后留空

4.1.3 思考题

第 1 题

下列几种叙述能否作为函数极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的等价定义?

- (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\},$ 成立 $|f(x) - A| \leq \varepsilon;$
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\},$ 成立 $|f(x) - A| < k\varepsilon$ (k 为正常数);
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\},$ 成立 $|f(x) - A| < 1/n;$
- (4) $\forall \varepsilon > 0, \exists n, \forall x \in O_{1/n}(a) \setminus \{a\},$ 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon。$

4.1.3 思考题

第 2 题

下列几种叙述能否作为函数极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的等价定义？

- (1) $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- (2) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- (3) 当 x 充分靠近 a 时, $f(x)$ 越来越接近 A 。

4.1.3 思考题

第 3 题

用对偶法则给出：

- (1) “ $f(x)$ 在点 a 不收敛于 A ” 的正面叙述；
- (2) “ $f(x)$ 在点 a 处没有极限” 的正面叙述。

4.1.3 思考题

第 4 题

设

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B.$$

证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 只有 3 种可能性:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$;

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(A)$;

(3) 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 不存在。

(本题来自《美国数学月刊》1975 年第 82 卷 63–64 页。)

下列各题要求按照函数极限的定义来做。

4.1.5 练习题

第 1 题

证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

4.1.5 练习题

第 2 题

证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x(x^2 - 3x + 2)} = -3.$$

4.1.5 练习题

第 3 题

证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-x} = 0.$$

4.1.5 练习题

第 4 题

当 a 取什么数值时,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1}$$

存在? 此时极限为何?

4.1.5 练习题

第 5 题

求 a, b , 使

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2.$$

4.2.3 思考题

第 1 题

试就

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$$

两类极限叙述极限的唯一性定理、局部有界性定理、局部保号性定理、比较定理、夹逼定理、Heine 归结原理和 Cauchy 收敛准则。

4.2.3 思考题

第 2 题

回答下列有关极限四则运算法则方面的问题：

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 存在，则当 x 趋于 a 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的敛散性之间有何联系？
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在， $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在，则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 是否存在？

4.2.3 思考题

第 3 题

找出下列运算中的错误:

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin \frac{1}{x-2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{1}{x-2}} = \frac{0}{\lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{1}{x-2}} = 0;$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0.$$

4.2.3 思考题

第 4 题

对于极限的加法运算法则作出两个证明：

- (1) 用函数极限定义；
- (2) 用 Heine 归结原理。

4.2.3 思考题

第 5 题

对于各种类型的函数极限中 $A = \infty$ 但不是有确定符号的无穷大量的情况，夹逼定理不成立。为什么？举出反例。

4.2.3 思考题

第 6 题

Heine 归结原理的推论在这里也成立。试证之。

4.2.5 练习题

第 1 题

证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad (a > 1, k > 0);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \quad (k > 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{a} = 1 \quad (a > 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = 1。$$

4.2.5 练习题

第 2 题

求

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+y^3}}{\sqrt{y^2+y^3+y}}.$$

4.2.5 练习题

第 3 题

求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{(x-1)/(x+2)}.$$

4.2.5 练习题

第 4 题

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x},$$

其中 n 为正整数。

4.2.5 练习题

第 5 题

设已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l, b \neq 0$ 。求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x}.$$

4.2.5 练习题

第 6 题

证明

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} = 1.$$

4.2.5 练习题

第 7 题

证明：在区间 $(a, +\infty)$ 上单调有界函数 f 一定存在极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 。

4.2.5 练习题

第 8 题

设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上为单调增加函数, 且存在一个数列 $\{x_n\} \subset (a, b)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

证明:

(1) f 在区间 (a, b) 上以 A 为上界;

(2) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ 。

4.2.5 练习题

第 9 题

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$ 。证明：对每个 $c \in (0, A)$ ，存在 $M > 0$ ，当 $x > M$ 时成立 $f(x) > c$ 。
(这是对于极限类型为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 的保号性定理。)

4.3.4 练习题

第 1 题

计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}.$$

4.3.4 练习题

第 2 题

注意下列两个“不等式”并求出正确值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \neq 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/x} \neq e。$$

4.3.4 练习题

第 3 题

设 $a > 0$, $b > 0$, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n.$$

(本题是数列极限问题, 但现在可以用函数极限知识来解决。)

4.3.4 练习题

第 4 题

设 $a_1, \dots, a_n$ 为正数, $n \geq 2$,

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x},$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

4.3.4 练习题

第 5 题

计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k},$$

并证明 Viète (韦达) 公式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}.$$

(这是数学家 Viète 在 1593 年发表的。它是数学史上第一次用无穷乘积来表示一个数, 同时也是对于圆周率 π 的认识上的重大突破。)

4.4.2 思考题

第 1 题

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$10^{-10^{10000}}, \quad e^{-10^{10}}, \quad x, \quad \sin x$$

是否是无穷小量?

$$10^{10^{10000}}, \quad e^{10^{10}}, \quad x^n, \quad a^x \ (a > 1)$$

是否是无穷大量?

4.4.2 思考题

第 2 题

确定下列极限是否存在, 若存在, 等于什么? (观察图 4.2 中的图像。)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x;$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

4.4.2 思考题

第 3 题

当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列等式中哪些可以成立:

(1) $o(1) = O(1)$;

(2) $O(1) = o(1)$;

(3) $o(x^2) = o(x)$;

(4) $O(x^2) = o(x)$;

(5) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$;

(6) $\frac{O(x^2)}{x} = o(x)$ 。

4.4.4 练习题

第 1 题

确定下列无穷小量的阶:

(1) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} \quad (x \rightarrow 0);$

(2) $\ln x - \ln a \quad (x \rightarrow a), \ a > 0;$

(3) $a^x - 1 \quad (x \rightarrow 0), \text{ 其中 } a > 0;$

(4) $a^{x^2} - b^{x^2} \quad (x \rightarrow 0), \text{ 其中 } a, b > 0;$

(5) $\ln(x + \cos \frac{\pi}{2}x) \quad (x \rightarrow 1);$

(6) $\ln x \ln(x-1) \quad (x \rightarrow 1^+).$

4.4.4 练习题

第 2 题

设存在极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

又有

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

证明: $f(x) = o(x) \quad (x \rightarrow 0)$ 。

4.4.4 练习题

第 3 题

与数列中的几个常见的无穷大量之间的关系

$$\ln n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (a > 1, \varepsilon > 0)$$

相类似, 证明当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\ln x \ll x^\varepsilon \ll a^x \ll x^x \quad (a > 1, \varepsilon > 0),$$

其中 $u \ll v$ 的定义是 $\lim \frac{u}{v} = 0$ 。

4.4.4 练习题

第 4 题

用等价量代换方法计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x^2+x) - 2\ln(x+1)];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2\sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x};$$

$$(6) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin t}{t} \right)^{1/t^2}.$$

4.5.2 参考题

第 1 题

若函数 f 在区间 (a, b) 上单调, 且有一个数列 $\{x_n\}$, 使得

$$x_n \rightarrow a^+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

请按照单侧极限的定义直接证明

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A.$$

4.5.2 参考题

第 2 题

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上严格单调增加, 且有一个在区间 $[a, b]$ 内的数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

4.5.2 参考题

第 3 题

在 Heine 归结原理（命题 4.2.3）的条件中：

- (1) 若将“每个数列 $\{x_n\}$ ”改为“每个单调数列 $\{x_n\}$ ”，其他要求不变，则结论是否仍然成立？
- (2) 若对“每个数列 $\{x_n\}$ ”增加要求

$$|x_{n+1} - a| < |x_n - a|, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

其他条件不变，则又如何？

又若在它的推论（命题 4.2.4）中作这些改动，结论是否仍然成立？

4.5.2 参考题

第 4 题

证明

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限为 0，并分析其阶数。

4.5.2 参考题

第 5 题

求

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right]^{1/x}, \quad a > 0, a \neq 1.$$

4.5.2 参考题

第 6 题

(1) 设函数

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx,$$

且对所有 x 成立

$$|f(x)| \leq |\sin x|.$$

证明:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

(2) 设函数

$$f(x) = a_1 \ln(1+x) + a_2 \ln(1+2x) + \cdots + a_n \ln(1+nx),$$

且对于所有 $x > 0$ 成立 $|f(x)| \leq |x|$ 。试陈述与 (1) 相应的不等式并加以证明。

4.5.2 参考题

第 7 题

对一般的正整数 n ，计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx - n \sin x}{x^3}.$$

4.5.2 参考题

第 8 题

证明 Dirichlet 函数 (4.1.5 小节的题 11) 有以下解析表达式:

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n} \right\}.$$

4.5.2 参考题

第 9 题

(1) 设函数 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上满足

$$f(2x) = f(x),$$

且存在有限极限 $f(+\infty)$ 。证明： f 是常值函数。

(2) 设存在 $a > 0$, $a \neq 1$, 使得函数 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上满足

$$f(ax) = f(x).$$

证明：若存在有限极限 $f(+\infty)$ 或 $f(0^+)$, 则 f 为常值函数。

4.5.2 参考题

第 10 题

设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上定义, 在 $x = 0$ 邻近有界, 又有 $a > 1, b > 1$, 使得对每个 $x \in \mathbb{R}$ 成立

$$f(ax) = bf(x).$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

4.5.2 参考题

第 11 题

设函数 f 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1.$$

证明: 对每个 $a > 0$, 成立

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1.$$

4.5.2 参考题

第 12 题

设 f 在 $(0, +\infty)$ 上定义, 且在其中的每个有界子区间上有界。证明等式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立。

4.5.2 参考题

第 13 题

设 f 在 $(0, +\infty)$ 上定义, 且在其中的每个有界子区间上有界。证明等式

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n}$$

在右边为有限极限或 $\pm\infty$ 时成立。

4.5.2 参考题

第 14 题

设 T 为正常数, 若函数 f, g 在 $[a, +\infty)$ 上满足条件:

(1) $g(x+T) > g(x), x \in [a, +\infty)$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 且 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的每个有界子区间上有界;

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+T) - f(x)}{g(x+T) - g(x)} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4.5.2 参考题

第 15 题

设成立

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

证明:

$$f(x) = o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

(本题比 4.4.4 小节的题 2 要难一点。)

数学分析习题课讲义 · 第 2 版 · 上册

第 5 章

连续函数与单调函数

_____ 课后习题

各节练习题与第五章总练习题 · 共 64 题

一题一页 · 题后留空

5.1

连续函数的局部性质

本习题共 16 题

局部连续性、左右连续、间断点分类、初等连续性 & 复合极限。

5.1 连续函数的局部性质

第 1 题

分别证明定理 5.1 中的 (1) 和 (2)。

5.1 连续函数的局部性质

第 2 题

直接用 ε - δ 的连续性定义证明定理 5.3。

5.1 连续函数的局部性质

第 3 题

设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b,$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

5.1 连续函数的局部性质

第 4 题

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b,$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = a^b.$$

5.1 连续函数的局部性质

第 5 题

设函数 g 在 $x = 0$ 连续, $g(0) = 0$, 函数 f 在某个邻域 $O(0)$ 内满足条件

$$|f(x)| \leq c|g(x)|.$$

证明 f 在 $x = 0$ 连续。

5.1 连续函数的局部性质

第 6 题

-
- (1) 设 I 为区间, $[a, b] \subset I$, $f \in C[a, b]$ 。是否存在 $g \in C(I)$ 使得 $g(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$? 即是否能够将 f 连续延拓到 I 上?
- (2) 对于 $f \in C(a, b)$ 考虑同样的问题。

5.1 连续函数的局部性质

第 7 题

用 ε - δ 语言写出 $y = f(x)$ 在点 x_0 左连续和右连续的定义。

5.1 连续函数的局部性质

第 8 题

举出一个函数，它在无限多个点上左连续而不右连续。

5.1 连续函数的局部性质

第 9 题

直接用定义证明下列函数的连续性：

$$(1) f(x) = |x|; \quad (2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

5.1 连续函数的局部性质

第 10 题

求下列函数的连续范围:

$$(1) f(x) = \sec x + 2 \csc x; \quad (2) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

5.1 连续函数的局部性质

第 11 题

找出下列各函数的间断点, 判别其类型。对可去间断点改造或补充该点的函数值使之连续; 对跳跃间断点求出其跃度。

$$(1) f(x) = D(x);$$

$$(2) f(x) = \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x};$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}};$$

$$(5) f(x) = x + [x];$$

$$(6) f(x) = [x] + [-x];$$

$$(7) f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x);$$

$$(8) f(x) = \frac{1}{1 - e^{x/(x-1)}};$$

$$(9) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, \quad x \neq -1;$$

$$(10) f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, & x \neq 0, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

5.1 连续函数的局部性质

第 12 题

试确定 b, c , 使下列函数在其定义域上处处连续:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ x^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{\frac{1}{1-x}}, & x > 1. \end{cases}$$

5.1 连续函数的局部性质

第 13 题

-
- (1) 若在 x_0 处函数 f 连续, 函数 g 间断, 或两个函数都间断, 讨论 $f + g$ 在该点的连续性;
- (2) 对 fg 讨论同样的问题。

5.1 连续函数的局部性质

第 14 题

-
- (1) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 且对每个 $G > 0$, $f \in C(-G, G)$, 问是否有 $f \in C(-\infty, +\infty)$?
- (2) 设 f 在 $[a, b]$ 上定义, 且对每个足够小的 $\varepsilon > 0$, $f \in C(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, 问是否有 $f \in C(a, b)$ 和 $f \in C[a, b]$?

5.1 连续函数的局部性质

第 15 题

讨论 $f(x)$, $|f(x)|$, $f^2(x)$ 在点 x_0 的连续性的关系。

5.1 连续函数的局部性质

第 16 题

求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - x + 5};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\cos(\tan x));$

(3) $\lim \frac{\sin x}{x},$ 其中 $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty$ 。

5.2

区间上连续函数的基本性质

本习题共 23 题

零点定理、最值定理、介值定理、一致连续性与有限覆盖方法。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 1 题

请举例说明以下各点：

- (1) 在零点存在定理中的条件之一不成立时，定理不再成立；
- (2) 满足零点存在定理条件的函数可以有无限多个零点；
- (3) 在用闭区间套定理作为工具证明零点存在定理时，逐次等分点永远不是函数的零点的情况也是可能发生的。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 2 题

设 f 在 $[a, b]$ 上是严格单调减少的连续函数, 参数 $k < 0$ 。问方程 $f(x) = kx$ 在 $[a, b]$ 中有几个根? (即将例题 5.12(2) 中的条件 $k > 0$ 换为 $k < 0$ 。)

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 3 题

设某运动员用 30 分钟跑完 6 公里。证明：其中至少有一段长度为 1 公里的路程恰用 5 分钟跑完。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 4 题

设 $f \in C[a, b]$, $f(a) = f(b)$ 。证明：存在 $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, 满足

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}, \quad f(a_1) = f(b_1).$$

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 5 题

(1) 若余弦多项式

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx$$

的系数满足条件 $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq a_n$, 证明: $C_n(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 中至少有 $2n$ 个零点。

(2) 证明: 方程

$$x^{17} + \frac{215}{1 + \cos^3 3x} = 18$$

一定有实根。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 6 题

设 $f \in C[a, b]$, $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ 。证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 7 题

设 $f \in C[a, b]$, 且 $f(x)$ 只取有理数。问: f 是怎样的函数?

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 8 题

已知方程 $2^x = 4x$ 有根 $x = 4$ ，从图像观察可猜测在 $[0, 1]$ 中还有一个根。试证明之。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 9 题

试在区间 $[0, 1]$ 上构造一个处处不连续函数，它能取得最大值、最小值和介于其间的一切值。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 10 题

举例说明区间上的连续函数的值域可以是 §1.3.1 列举的 9 种区间中的每一种区间。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 11 题

-
- (1) 若 $f \in C(\mathbb{R})$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 证明: f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取到最小值;
- (2) 若 $f \in C(\mathbb{R})$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 且其最小值点 x_0 满足 $f(x_0) < x_0$, 证明: 复合函数 $f \circ f$ 至少在两个点达到最小值。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 12 题

设 $f \in C[a, b]$, 且 $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ 。证明: $\frac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 13 题

下列各函数在指定区间上哪些是一致连续的：

(1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 区间 $(-\infty, +\infty)$;

(2) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 区间 $(0, 1)$;

(3) $f(x) = \sin x^2$, 区间 $(0, 1)$ 。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 14 题

-
- (1) 若 f 是 (a, b) 上的连续有界函数, 问 f 在 (a, b) 上是否一致连续?
- (2) 若 f 是 (a, b) 上的单调连续有界函数, 问 f 在 (a, b) 上是否一致连续?

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 15 题

设 f 为多项式, 问 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否一致连续?

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 16 题

设 $f \in C[a, b]$ 。证明：

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \forall i = 1, \dots, n, \\ &\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 17 题

试从 Cantor 定理推出连续函数的有界性定理。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 18 题

证明定理 5.12 的必要性证明中关于极限 $f(b^-)$ 的存在性。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 19 题

设对于在区间 I 上定义的函数 f ，存在一个正常数 L ，使得对于任意 $x', x'' \in I$ ，满足不等式

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|,$$

证明： f 在区间 I 上一致连续。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 20 题

设 f, g 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的一致连续函数。问下列函数是否在该区间上一致连续:

$$(1) af + bg, \quad a, b \text{ 为常数}; \quad (2) fg.$$

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 21 题

若在区间 I 上存在两个数列 $\{x'_n\}, \{x''_n\}$, 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = A \neq 0,$$

证明: f 在 I 上不一致连续。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 22 题

设 $f \in C[0, +\infty)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

对于

$$(1) g(x) = ax + b, \quad (2) g(x) = \sin x, \quad (3) g(x) = x^2,$$

试考虑 f 在 $[0, +\infty)$ 上的一致连续性, 并归纳出一般结论。

5.2 区间上连续函数的基本性质

第 23 题

若 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, $\{x_n\}$ 是基本数列, 证明: $\{f(x_n)\}$ 也是基本数列。

5.3

单调函数

本习题共 5 题

连续单射、严格单调性、值域以及单调函数的不连续点。

5.3 单调函数

第 1 题

设 $f \in C[a, b]$ ，且存在反函数。证明： f 一定是严格单调函数。

5.3 单调函数

第 2 题

试用连续函数的介值定理证明定理 5.16。

5.3 单调函数

第 3 题

设 f 是区间 I 上的严格单调减少函数。对于 $I = [a, b]$ 和 $I = (a, b)$ ，分别写出 f 的值域。

5.3 单调函数

第 4 题

设 f 在 $[a, b]$ 上单调增加, $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ 是 f 的不连续点。证明:

$$\sum_{k=1}^n [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \leq f(b) - f(a).$$

5.3 单调函数

第 5 题

设 f 是 $(0, +\infty)$ 上的单调增加函数。证明: $f(0^+)$ 和 $f(+\infty)$ 一定有定义, 并举出这两个极限值均为有限或无穷大的 4 种可能组合的例子。

总

第五章总习题

本章总习题共 20 题

连续性、不动点、最值与一致连续性的综合运用。

总 第五章总习题

第 1 题

-
- (1) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立 $f(2x) \equiv f(x)$, 且 $x = 0$ 处连续。证明: f 为常值函数;
- (2) 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立 $f(x^2) \equiv f(x)$, 且 $x = 0, 1$ 处连续。证明: f 为常值函数。

总 第五章总习题

第 2 题

若 $f \in C(I)$, $c > 0$, 如下定义函数 g :

$$g(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & -c \leq f(x) \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明 $g \in C(I)$, 并阐明其几何意义。

总 第五章总习题

第 3 题

-
- (1) 举出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不连续的函数;
- (2) 举出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上只在点 $x = 0$ 处连续而在其他点处不连续的函数;
- (3) 给定有限个点 $x_1, \dots, x_n$, 举出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上只在这有限个点处连续, 而在其他点处不连续的函数。

总 第五章总习题

第 4 题

若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = b > 0,$$

且 $p, q \geq 0$, $p + q = 1$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (px_n + qy_n)^n = a^p b^q.$$

总 第五章总习题

第 5 题

试直接证明有界闭区间上连续函数的值域定理，即定理 5.7。

总 第五章总习题

第 6 题

设 $f \in C[a, b]$ ，且满足条件 $f([a, b]) \subset [a, b]$ 。证明：存在 $\xi \in [a, b]$ ，使得 $f(\xi) = \xi$ 。

总 第五章总习题

第 7 题

设 $f \in C[a, b]$, 且满足条件 $f([a, b]) \supset [a, b]$ 。证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$ 。

(以上两题都是不动点存在定理。)

总 第五章总习题

第 8 题

设 $f \in C[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 且存在某个正整数 n , 使得

$$\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ 次}}(x) = x \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明: $f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$ 。

总 第五章总习题

第 9 题

设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且存在 $\alpha > 0$, $\forall x_1, x_2$, 成立

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \alpha |x_1 - x_2|.$$

证明: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ 。

总 第五章总习题

第 10 题

试用确界存在定理与 Lebesgue 方法证明连续函数的有界性定理。

总 第五章总习题

第 11 题

试用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的最值定理，即定理 5.9。

总 第五章总习题

第 12 题

设 $f \in C[a, b]$, 对于 $a \leq x \leq b$, 定义

$$M(x) = \max\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}, \quad m(x) = \min\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}.$$

证明: $M, m \in C[a, b]$ 。

总 第五章总习题

第 13 题

证明: f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x_1, x_2 \in I$, 当

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| > A$$

时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 。

总 第五章总习题

第 14 题

若 $f \in C[a, b]$, 证明: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的分段线性函数 $L(x)$, 使得

$$|f(x) - L(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

总 第五章总习题

第 15 题

若对每个充分小的 $\varepsilon > 0$, 函数 f 在 $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ 上一致连续, 问 f 在 (a, b) 上是否一致连续?

总 第五章总习题

第 16 题

(1) 设 $f \in C[a, b]$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = B$, 试问: 零点存在定理 (设 $f(a) \cdot B < 0$)、有界性定理、最值定理和 Cantor 定理是否仍然成立?

(2) 对于 $b = +\infty$ 考虑与 (1) 相同的问题, 并比较它们的结果。

总 第五章总习题

第 17 题

设 f 是 $(0, +\infty)$ 上的一致连续函数, 且对于每个 $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0.$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

总 第五章总习题

第 18 题

设 f 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数, 且 $f(0) = f(1) = 0$ 。证明: 对每一个实数 $\alpha \in (0, 1)$, 存在 x_0 , 使得 $x_0 + \alpha \in [0, 1]$, 且成立

$$f(x_0) = f(x_0 + \alpha).$$

又问: 若去掉 f 非负的条件, 结论是否仍然成立?

总 第五章总习题

第 19 题

设 f 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且 $f(0) = f(1)$ 。证明: 对每一个正整数 n , 存在 x_0 , 使得 $x_0 + \frac{1}{n} \in [0, 1]$, 且成立

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

又问: 本题与上一题有什么联系?

总 第五章总习题

第 20 题

设 f 在点 x_0 的一个邻域上有定义。若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(x_0)$:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

(或相应的 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$)，则称 f 在点 x_0 下半连续 (上半连续)。证明 (只讨论上半连续情况)：

- (1) (局部保号性) 若 f 在点 x_0 上半连续, $f(x_0) < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O_\delta(x_0)$ 时 $f(x) < 0$;
- (2) (有界性) 若 f 在 $[a, b]$ 上处处上半连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上有上界;
- (3) (最值性) 若 f 在 $[a, b]$ 上处处上半连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上有最大值。

数学分析习题课讲义 · 上册

答案与提示

第一至五章

原书未附独立答案册；以下内容依据题面与教材方法整理。

第 1 章 引论：答案与提示

§1.3.2 练习题

1-1 (1) 令 $x = -1 - h \in [0, 1]$ 。当 n 为偶数时，左边非负而右边非正；当 n 为奇数时，只需用 $x^n \leq 1 \leq n - 1 + nx$ 。

(2) 对整数 $n \geq 2$ 作二项式展开，得

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

对 $h \geq 0$ ，保留更高次项可得到相应推广。

(3) 对非负 a_i 直接归纳并用交叉项非负；若 $a_i \in (-1, 0]$ ，则 $1 + a_i \in [0, 1]$ ，结论仍成立。

1-2 (1) 对 $1, 2, \dots, n$ 用算术-几何平均不等式。各数不全相等，故严格不等式成立。

(2) 令 $u_k = k(n+1-k)$ 。由题设乘积， $(n!)^{2/n}$ 是这些 u_k 的几何平均；它们的算术平均为 $(n+1)(n+2)/6$ 。因此

$$n! < \left(\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{6}} \right)^n < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}} \right)^n.$$

(3) 式 (2) 的估计更强，因为 $\sqrt{(n+1)(n+2)/6} < (n+1)/2$ ($n > 1$)。

(4) 对正数 $1^r, 2^r, \dots, n^r$ 用算术-几何平均不等式，即得所证不等式。

1-3 记 $G = (\prod a_k)^{1/n}$ 。对 $1/a_1, \dots, 1/a_n$ 用算术-几何平均不等式，得到 $\sum 1/a_k \geq n/G$ ；两边取倒数即可。

1-4 对 ab, bc, ca 用算术-几何平均不等式，得 $(abc)^{2/3} \leq (ab + bc + ca)/3$ ，开方即得第一个不等式。第二个不等式等价于

$$\sum a^2 \geq ab + bc + ca,$$

这可由 $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ 得到。对 n 个非负数，可推广为 $E_1 \geq E_2^{1/2} \geq \dots \geq E_n^{1/n}$ ，其中 E_k 是第 k 个初等对称平均。

1-5 (1) 用三点不等式及其反向形式。

(2) 右侧由三点不等式得到；左侧由同一不等式反复估计 $|\sum a_k| \geq |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|$ 。左边也可以换成绝对值形式，因为所证不等式对其相反数同样成立。

(3) 函数 $x/(1+x)$ 在 $[0, \infty)$ 上单调增加且次可加，或直接通分即可。

(4) 对 $(a+b)^n$ 作二项式展开，逐项使用 $|a|^k|b|^{n-k}$ 作估计。

1-6 (1) 对 n 作归纳，归纳步对末尾两个变量用二元 Cauchy 不等式。

(2) 右端按乘积展开后恰好等于左端, 从而由平方和非负推出不等式。

(3) 令 $A = a_k / \sqrt{\sum a_i^2}$ 、 $B = b_k / \sqrt{\sum b_i^2}$, 逐项使用题给不等式后求和。

(4) 先算得 $|c_k| = a_k^2 + b_k^2$ 。再展开 $|\sum c_k|^2$, 比较虚部即可得到 Cauchy 不等式。

1-7 先证 $n = 2$: 令 $x + y = s$, $xy = p$, 原不等式两边交叉相乘后的差为 $(1 - s)(x - y)^2 \geq 0$ 。然后作向前、向后归纳: 由 n 个变量得到 $2n$ 个变量时, 将原变量重复一次; 由 n 个变量推出 $n - 1$ 个变量时, 把最末一个变量取为其余各变量的平均值。条件 $0 < x_i \leq 1/2$ 保证相应平均值仍在该范围内。

1-8 由 Cauchy 不等式,

$$(a + c + g + t)^2 \leq 4(a^2 + c^2 + g^2 + t^2).$$

左边等于 1, 故平方和至少为 $1/4$ 。等号成立当且仅当四数相等; 再由总和为 1, 得到 $a = c = g = t = 1/4$ 。

第 2 章 数列极限：答案与提示

思考题、练习题与参考题

2.1.2 思考题 提示

2.1.2-1 第一种就是定义；在第二种中取 $m > [1/\varepsilon]$ ，反方向取 $\varepsilon = 1/m$ ；第三种用 $\varepsilon' = K\varepsilon$ 与 $\varepsilon' = \varepsilon/K$ 互推。

2.1.2-2 N 一般依赖于 ε ，且不唯一；只需证明存在一个足够大的 N 。

2.1.2-3 第一式正确；第二式一般不成立，且需排除分母为零，例如 $a_n = (-1)^n/n$ 。

2.1.2-4 极限为整数。由柯西性可推出从某项起各项相等，因此收敛的整数项数列最终为常数列。

2.1.5 练习题 提示

2.1.5-1 分别作差、估计分子并限制项数，或使用 $a^n/n! \rightarrow 0$ 的标准估计；每题最后取合适的 N 。

2.1.5-2 使用 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |a_n - a|/(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})$ ，并分 $a = 0$ 与 $a > 0$ 。

2.1.5-3 正方向由反向三点不等式得到；反方向不成立，如 $a_n = (-1)^n$ 。

2.1.5-4 依次利用多项式的有限和结构、指数与对数的连续性、 $x^b = e^{b \ln x}$ 以及正弦的连续性；这些结论均可用五类基本函数的单调性作估计。

2.1.5-5 利用 $\frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n} \rightarrow \log_a 1 = 0$ 。

2.2.1 思考题 提示

2.2.1-1 $\{a_n + b_n\}$ 必发散； $\{a_n b_n\}$ 的敛散性不能确定。可取 $a_n = 0, 1/n, 1/n^2$ ，并配以不同发散数列作例。

2.2.1-2 和与积都不能确定敛散性；可用两个具有相反主项的发散数列构造反例。

2.2.1-3 收敛。由 $a_n \rightarrow a$ 和 $c_n - a_n \rightarrow 0$ 得 $c_n \rightarrow a$ ，再用夹逼。

2.2.1-4 不能把随项数变化的有限和拆成项数无限增加的各部分极限再相加；错误在于使用了有限个数列的和的极限法则。

2.2.1-5 不成立；极限可能取到端点，例如 $a_n = 1 - 1/n$ 且 $0 < a_n < 1$ 。

2.2.1-6 成立。取 $\delta = \min\{a - b, c - a\}$ （若一端非严格则为正），则最终有 $|a_n - a| < \delta$ 。

2.2.1-7 前一个命题成立: 从某项起 $|a_n| < 1/2$, 故乘积被常数乘以 $2^{-(n-N)}$ 控制。反命题不成立, 乘积趋于 0 不能推出数列本身趋于 0。

2.2.4 练习题 提示

2.2.4-1 充分性对任意 ε 同时使用偶数项和奇数项的 N , 取二者较大者; 必要性显然。

2.2.4-2 (1) 设 $M = \max a_i$, 则 $M \leq (\sum a_i^n)^{1/n} \leq Mp^{1/n}$, 极限为 M 。(2) 和式共有 $2n+1$ 项, 用 $\frac{2n+1}{n+1} < x_n < \frac{2n+1}{n}$ 。(3) 根号内为调和型部分和, 介于 1 与某个缓慢增长量之间, 开 n 次方后极限为 1。(4) 取 m 使 $a/2 < a_n < 2a$, 再开 n 次方并夹逼。

2.2.4-3 (1) 乘以 $1-x$ 后望远镜化, 极限为 $1/(1-x)$ 。(2) $1-1/k^2 = (k-1)(k+1)/k^2$, 极限为 $1/2$ 。(3) 通项为 $\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$, 乘积望远镜化, 极限为 $1/3$ 。(4) 部分分式为 $\frac{1}{2}[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}]$, 极限为 $1/4$ 。(5) 同样望远镜化, 极限为 $1/(\nu \cdot \nu!)$ 。

2.3.2 练习题 提示

2.3.2-1 若原数列非负或非正, 则绝对值保持单调; 若在变号之后, 它从首次靠近极限起保持单调。反过来不成立, 例如 $x_n = (-1)^n/n$ 。

2.3.2-2 先证 $a_n \leq b_n$ 至少最终成立; 由单调性知 a_n 有上界、 b_n 有下界, 再令两个极限之差等于题设差的极限 0。

2.3.2-3 记单调增加有上界数列的极限为 A 。若某项 $a_k > A$, 用它作上界可推出矛盾; 单调减少情形对称。

2.3.2-4 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2n+3}$, 故数列递减且非负; 也可直接估计 $x_n \leq (2/3)^n$, 极限为 0。

2.3.2-5 相邻项的比趋于 $1/2$ 。分子次数比通项多 1, 故乘积以 $C(1/2)^n/n$ 的量级趋于 0。

2.3.2-6 S_n 单调增加。对 $k \geq 2$ 用 $k^{-p} \leq \int_{k-1}^k x^{-p} dx$, 得部分和一致有上界。

2.3.2-7 由 $0 < \sin x < x$ ($0 < x < \pi/2$) 知 $\{x_n\}$ 递减且有下界 0, 故收敛; 极限满足 $x = \sin x$, 故为 0。

2.3.2-8 把题中乘积写成 $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right) \cdot \frac{1}{(2n)^2}$ 。该乘积最终小于一个常数乘以 $1/n$, 因此 $a_n \rightarrow 0$ 。

2.3.2-9 由 $(2k)!!/(2k-1)!! = 2k/(2k-1)$ 。前一比值可验证 $a_{n+1} > a_n$; 另一方面 a_n 可写成 $\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ 。利用 $\frac{4k^2}{4k^2-1} = 1 + \frac{1}{4k^2-1}$ 得一致有界, 故收敛。

2.3.2-10 只有 (1) 单调递减; (2) 不单调; $\{\sqrt[n]{n!}\}$ 单调增加。

2.3.2-11 单调且有收敛子列时, 子列的极限给出单调数列的上界或下界; 再由单调有界定理, 原数列收敛于同一极限。

2.3.2-12 根唯一且 $x_n \in (0, 1)$ 。把方程写成 $x_n(1-x_n^n)/(1-x_n) = 1$ 。若子列极限为 x , 则 $x/(1-x) = 1$ 。由单调性及唯一性得 $x = 1/2$ 。

2.4.3 练习题 提示

2.4.3-1 固定 $M > 0$, 先取足够大的 N_0 使 $x_k > 2M$; 当 n 远大于 N_0 时, 把平均和拆成前 N_0 项与后 $n - N_0$ 项, 后者已经给出 $2M$ 量级, 前者所占比例趋于 0, 故平均值最终大于 M 。

2.4.3-2 先用反证排除“某项以后始终比 $a + \delta$ 大”的情况; 再利用单调性, 若极限上确界小于 a , 则平均值也会小于 a 。因此上下极限均等于 a 。

2.4.3-3 极限为 $(a+b)/2$: 前 n 项中奇、偶项各占约一半。

2.4.3-4 $\frac{a_n - a_0}{n}$ 是差分 $a_k - a_{k-1}$ 的平均值, 所以它趋于 d ; 又 $a_0/n \rightarrow 0$ 。

2.4.3-5 对正项数列取对数, 化为 $\frac{1}{n} \sum \ln a_k \rightarrow \ln A$, 再取指数。

2.4.3-6 $\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln \frac{a_k}{a_{k-1}} + \frac{1}{n} \ln a_1 \rightarrow \ln l$ 。

2.4.3-7 分别对奇数项与偶数项使用 Cesàro 平均: 两个子列相邻差趋于 0, 故各自除以 n 后趋于 0。

2.4.3-8 题 7 已得 $x_n/n \rightarrow 0$, 于是 $\frac{x_{n-1}}{n} = \frac{x_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \rightarrow 0$; 两者相减即可。

2.4.3-9 令 $b_n = 1/a_n$ 。由

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{1 - a_n} \rightarrow 1$$

及 Cesàro 命题, $b_n/n \rightarrow 1$, 即 $na_n \rightarrow 1$ 。

2.4.3-10 把 $a_k = \alpha + (a_k - \alpha)$ 、 $b_k = \beta + (b_k - \beta)$ 代入卷积平均; 主项为 $\alpha\beta$, 两个误差项的绝对值平均值趋于 0。

2.5.5 练习题 提示

2.5.5-1 答案依次为

$$e^{-1}, \quad \sqrt{e}, \quad e^2, \quad +\infty, \quad 1, \quad e.$$

各题先取对数, 再使用标准极限 $(1+x/t)^t \rightarrow e^x$ 。

2.5.5-2 由

$$\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^{k/n} \frac{dt}{1+t}$$

夹在两个长度相同的积分之间, 即可得到双边不等式。

2.5.5-3 取对数并利用 $\ln(1+u) \sim u$:

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \sim \frac{n(n+1)}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

原极限为 $\sqrt{e}$ 。

2.5.5-4 极限为 e 。令 $m_n = [p_n]$ ，再用夹逼处理 p_n 与整数部分之差。

2.5.5-5 由 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ，原式为 $\sqrt{2\pi n}(2/e)^n \rightarrow 0$ 。

2.6.3 练习题 提示

2.6.3-1 (1) $\{x_n\}$ 单调有界，极限 L 满足 $L = \sqrt{a+L}$ ，故 $L = (1 + \sqrt{1+4a})/2$ 。(2) 这是常数列， $x_n = \sqrt{a}$ 对一切 n 成立。

2.6.3-2 令误差 $e_n = 1 - Ab_n$ ，则 $e_{n+1} = e_n^2$ 。由 $0 < e_1 < 1$ 得 $e_n \rightarrow 0$ ，故 $b_n \rightarrow A^{-1}$ 。

2.6.3-3 $b > 4$ 时 $x_1 = 1/2$ 映到 $b/4 > 1$ ，之后迭代值落在区间外并幅度增大；可由 $x_{n+1} - x_n = b(x_n - 1/2)^2 + (b-1)x_n$ 的符号或图表说明无界。

2.6.3-4 方程 $x = (x^2 + 1)/2$ 只有不动点 $x = 1$ 。当 $-1 \leq b \leq 1$ 时数列收敛于 1 ($b = -1$ 时第二步即为 1)；当 $|b| > 1$ 时迭代最终无界；因此收敛的 b 为 $[-1, 1]$ 。

2.6.3-5 不动点为 $1/(1-b)$ 。通解为

$$x_n = \frac{1}{1-b} + b^n \left(a - \frac{1}{1-b} \right).$$

故当 $|b| < 1$ (任意 a)，或当 $a = 1/(1-b)$ (任意 $b \neq 1$) 时收敛； $b = 1$ 时无收敛情形。

2.6.3-6 (1) 有，例如 $f(x) = x/2$ ；(2) 不存在使所有初始值都发散的仿射迭代；(3) 有，例如 $f(x) = x$ ，不同初始值给出不同常数列；(4) 有，例如 $f(x) = 1 - x$ ，不动点 $1/2$ 给出常数列，其余初始值形成二周期。

2.6.3-7 由条件先得 $x_n > 1/2$ 。再整理

$$x_{n+1} - 1 < \frac{x_n - 1}{x_n}.$$

若 $x_n > 1$ ，正误差逐步收缩；若 $x_n < 1$ ，则下一项越过 1。对奇偶子列分别估计，可得它们都趋于 1，故原数列极限为 1。

2.6.3-8 由 AM-GM，先得 $x_n \geq \sqrt{A}$ ($n \geq 2$)。随后 $x_{n+1} \leq x_n$ ，故数列收敛；极限满足 $L = (L+A/L)/2$ ，且 $L > 0$ ，所以 $L = \sqrt{A}$ 。

2.7.3 第一组参考题 提示

2.7.3-1 先比较偶数项子列、奇数项子列和 $3k$ 子列的重叠部分，可知这三个子列有同一极限；再用偶数项与奇数项覆盖全部自然数。

2.7.3-2 按模 6 分成六个子列。由 $a_n \leq a_{n+2}$ 、 $a_n \leq a_{n+3}$ 可知各子列单调，且原数列有界；再用平移关系证明六个子列极限相同。

2.7.3-3 记 $u_n = a_n + a_{n+1}$, $v_n = a_n + a_{n+2}$. 证明 $a_{n+3} - a_n = u_{n+3} - v_{n+1} - u_n$, 右端趋于 0. 奇数项与偶数项随后均为柯西列, 且 u_n 收敛使二者极限相同。

2.7.3-4 若 $a > 1$, 因为比值最终大于某数 $q > 1$, 从某项起 $|a_n|$ 几何增长, 与 $a_n \rightarrow 0$ 矛盾; 故 $a \leq 1$ 。

2.7.3-5 由 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$,

$$a_n = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n k + O(n^{-1}),$$

故极限为 $1/4$ 。

2.7.3-6 若整数 n 的不同素因子为 $q_1, \dots, q_r$, 则 $2^r \leq q_1 \cdots q_r \leq n$, 所以 $p(n) \leq \log_2 n$. 因此 $p(n)/n \rightarrow 0$ 。

2.7.3-7 展开 $\sqrt{n+j} = \sqrt{n} + \frac{j}{2\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})$. 零阶项因 $\sum a_j = 0$ 消失, 一阶项为 $O(n^{-1/2})$, 故极限为 0。

2.7.3-8

$$(1+n)^k - n^k = n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right] = O(n^{k-1}) \rightarrow 0.$$

2.7.3-9 (1) 不一定收敛。例如当 n 为偶数时取 $x_n = 1/n$, 为奇数时取 $x_n = 0$, 则 $x_n \rightarrow 0$, 但 $y_n = n(x_n - x_{n-1})$ 在相邻两项上约在 $-1, 1$ 间摆动。(2) 若 $y_n \rightarrow L \neq 0$, 则 $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n y_k/k$ 会像 $L \ln n$ 一样发散, 与收敛矛盾。

2.7.3-10 (1) 条件给出 $a_{n+1}/a_n \rightarrow +\infty$, 从某项起比值大于 2, 故 $a_n \rightarrow +\infty$ 。(2) 若 $\{a_n\}$ 有界, 取上极限 $M > 0$ 的逼近子列; 由条件可使 a_{n+2} 相对 a_n 任意大, 与其有界性矛盾。

2.7.3-11 左边由归纳证明; 右边当 $n = 6$ 直接验证, 并由

$$\frac{(n+1)!}{(n/2)^n} / \frac{n!}{(n/2)^n} = (n+1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^n < \frac{n+1}{2}$$

在 $n \geq 6$ 时完成归纳。

2.7.3-12 将 $n!e = \sum_{k=0}^n n!/k! + \text{正余项}$ 分组估计可得右边; 对 $(1 + 1/n)^n < e$ 反复使用可得 $n! > (n/e)^n$ 。

2.7.3-13 (1) 把 $\frac{1}{n!n} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n(n-1)!}$ 后逐项望远镜化。(2) 对 (1) 两边令 $n \rightarrow \infty$ 。(3) 新加项 $\frac{1}{n!n}$ 正好估计了部分指数和余项的量级, 因此误差更小。

2.7.3-14 a_n 的相邻增量 $\frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < 0$, 故单调递减; 再用积分估计 $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k} > 2(\sqrt{n} - 1)$ 得一致下界, 故收敛。

2.7.3-15 令 $A_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. 有

$$\frac{a_n}{n} = A_n - \frac{n-1}{n} A_{n-1} \rightarrow A - A = 0.$$

2.7.3-16 取对数:

$$0 \leq \frac{\ln n!}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \ln k \leq \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0.$$

再取指数即得极限 1。

2.7.3-17 条件推出 $x_{n+1} \geq 1/[4(1-x_n)] > 0$, 进而 $x_n \in [1/4, 1)$ 。考察 $x_{n+2} = f(x_n)$, 其中 $f(x) = 1/[4(1-x)]$; f 在 $[1/4, 1)$ 上单调增加。故奇、偶子列各自收敛, 再由边界关系得到共同极限满足 $4x(1-x) = 1$, 即极限为 $1/2$ 。

2.7.3-18 由特征方程 $2r^2 - r - 1 = 0$ 得 $r = 1, -1/2$, 所以

$$a_n = \frac{b+2c}{3} + \left(b - \frac{b+2c}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

极限为 $(b+2c)/3$ 。

2.7.3-19 三步平均保持总和 $a+b+c$, 并把三个数之间的最大差按因子 $1/2$ 收缩。因此三个数列都收敛且极限相同, 均为 $(a+b+c)/3$ 。

2.7.3-20 (1) 证明 $b_n < a_{n+1} < a_n$, 因此两数列都收敛; 对 $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ 取极限可知二者极限相等。(2) 利用正多边形的半周长关系, 令外切与内接正多边形边数按倍增规律变化; 由 $\lim n \sin(\pi/n) = \pi$ 夹逼得到公共极限 π 。

2.7.3 第二组参考题 提示

2.7.3-1 记第 n 层内层的嵌套根为 $u_{n,k}$, 其中 $k = n, n-1, \dots, 1$ 。可取一个统一上界 M 并证明每一层的增量按几何级数衰减, 因此 $\{a_n\}$ 是柯西列。

2.7.3-2 用二项式展开估计 $(1+1/n)^n$ 与部分指数和之差, 并把指数尾项控制为 $e/(2n)$ 。

2.7.3-3 由 $n!e = n! + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$ 可知 $n!e$ 的小数部分为 $1/n + O(1/n^2)$, 故原极限为 2π 。

2.7.3-4 由 $S_k \sim \ln k$, 得 K_n 的增长阶为 e^n , 因此 $K_{n+1}/K_n \rightarrow e$ 。

2.7.3-5 利用 $\sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \ln n + O(1)$, 除以 n^2 后极限为 $1/2$ 。

2.7.3-6 $A_n = 2^n/(n+1)$, 故 $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow 2$ 。另一方面, 由上一题的乘积估计, $\ln G_n = \frac{1}{n+1} \sum \ln \binom{n}{k} = \frac{n}{2} + O(\log n/n)$, 故 $\sqrt[n]{G_n} \rightarrow \sqrt{e}$ 。

2.7.3-7 令 $A = \lim A_n$ 、 $b_k = a_k = A_k - A_{k-1}$, 用分部求和得到

$$\sum_{k=1}^n p_k a_k = p_n A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) A_k.$$

再除以趋于无穷的 p_n , 并用 $A_n \rightarrow A$ 与 $p_n \rightarrow +\infty$ 。

2.7.3-8 令 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$ 。由题设 $a_n A_n \rightarrow 1$, 而 $A_n - A_{n-1} = a_n^2$ 。于是 $A_n^3 - A_{n-1}^3 \rightarrow 3$, 从而 $A_n \sim (3n)^{1/3}$ 、 $a_n \sim (3n)^{-1/3}$ 。

2.7.3-9 由非负性, $u_n \geq u_{n+1}^2$, 且部分和收敛蕴含 $u_n \rightarrow 0$ 。把条件对所有下标及尾部求和、再令首项下标适当移动, 可推出尾部平方和为 0, 从而每个 $u_n = 0$ 。

2.7.3-10 固定 $\varepsilon > 0$, 先取 N_0 使 $|a_k - a| < \varepsilon$ 对 $k > N_0$; 再把 Toeplitz 和拆成 $k \leq N_0$ 与 $k > N_0$ 两部分。前者因 $t_{nk} \rightarrow 0$ 消失, 后者由权重和为 1 控制。

2.7.3-11 取 $t_{nk} = (p_k - p_{k-1})/p_n$ 或二项式型权重, 代入 Toeplitz 定理, 即可从加权平均的收敛推出相邻平均的 Stolz 形式。

2.7.3-12 把和分成 t 项有限头部与尾部, 或写成递推 $T_n = a_n + \lambda T_{n-1}$ 。令 $n \rightarrow \infty$ 得 $T = a + \lambda T$, 所以 $T = a/(1 - \lambda)$ 。

2.7.3-13 固定 m , 把卷积和的前 m 项与尾部拆开; 前 m 项利用 $x_n \rightarrow 0$, 尾部利用 $\sum |y_k| \leq K$ 与 x_n 的一致小性。

2.7.3-14 由 $y_n = x_n + 2x_{n+1}$ 反复回代:

$$x_1 = (-2)^{-m} x_{m+1} + \sum_{j=1}^m (-2)^{j-1} y_j.$$

若 y_j 收敛, 交错权重的尾段构成柯西列; 再结合一次迭代即可得 $\{x_n\}$ 收敛。

2.7.3-15 解递推式得

$$a_n = \frac{2^n + 4(-3)^n a_0}{5}.$$

要求 $a_n - a_{n-1} > 0$ 对一切 n 成立, 等价于

$$-\frac{1}{16} < a_0 < \frac{1}{24}.$$

2.7.3-16 奇、偶项分别构成收缩型迭代, 且两步复合映射在 2 附近导数绝对值小于 1。因此整个数列收敛。极限 $L > 0$ 满足 $L = \sqrt{7 - \sqrt{7 + L}}$, 解得 $L = 2$ 。

2.7.3-17 令 $t > 0$ 使 $y_0 = 2 \cosh t$, 则 $y_n = 2 \cosh(2^n t)$ 。用恒等式

$$2 \sinh t \prod_{k=0}^n 2 \cosh(2^k t) = \sinh(2^{n+1} t)$$

可求出 S_n , 再令 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\lim S_n = e^{-t} = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

2.7.3-18 关键是观察 $f(x) = a^x$ 与 $f(f(x))$ 的单调区间、不动点个数及大小关系。在 $a > 1$ 时利用 f 递增和不动点 $x = a^x$; 在 $0 < a < 1$ 时分别考察奇数项子列与偶数项子列, 它们分别由二阶迭代控制。由初值与不动点的位置关系判断子列是否趋向同一固定点, 即得题中各结论。

2.7.3-19 令 $f_b(x) = bx(1-x)$ 。先比较 x_2 与 x_1 , 再使用 f_b 在 $[0, 1/2]$ 与 $[1/2, 1]$ 上的单调性。各情形分别得到递减子列、收敛到不动点 $1 - 1/b$, 或由二阶复合 $f_b(f_b(x))$ 的单调性得到奇偶子列的分离极限。 $b > 4$ 时可取一个两点周期域说明不收敛。

第 3 章 实数系的基本定理：答案与提示

练习题与参考题

3.1.3 练习题 提示

3.1.3-1 若两个数都满足上确界的“上界且任意更小数不再是上界”性质，则二者同时不大于、不小于对方；下确界同理。

3.1.3-2 正确的是 $\sup A \leq a$ 。严格上界不一定能作为上确界取到，例如 $A = (0, 1)$, $a = 1$ 。

3.1.3-3 β 是上界，且 $x_n \rightarrow \beta$ 。若上确界 $s < \beta$ ，取 $\beta - \varepsilon > s$ ，数列最终落入该邻域，矛盾；故 $s = \beta$ 。

3.1.3-4 (1) $\sup = +\infty$, $\inf = 0$; (2) $\sup = 1$, $\inf = 0$; (3) 数列递增趋于 e ，故 $\sup = e$, $\inf = 2$;
(4) ne^{-n} 从 $n = 2$ 起递减， $\sup = 1/e$, $\inf = 0$; (5) $\sup = \pi/2$, $\inf = -\pi/2$; (6) 偶下标给出 $1 - 1/n$ ，奇下标给出 $-1 + 1/n$ ，故 $\sup = 1$, $\inf = -1$; (7) $n = 4k + 1$ 时可任意大， $n = 4k + 3$ 时可任意小，故上、下确界分别为 $+\infty, -\infty$ (扩展实数意义下)。

3.1.3-5 对每个 n 有 $x_n \leq \sup x_n$ 、 $y_n \leq \sup y_n$ ，故右边是 $\{x_n + y_n\}$ 的上界。下确界不等式可对 $-x_n, -y_n$ 使用上确界结果。

3.1.3-6 对任意 $x \in A$, $y \in B$ 有 $x \leq y$ ，故每个 $y \in B$ 都是 A 的上界，从而 $\sup A \leq y$ ；再对 $y \in B$ 取下确界。

3.1.3-7 $x \in A$ 与 $x + c \in B$ 一一对应，常数平移既不改变上下界次序，也不改变“最小上界/最大下界”的位置。

3.2.3 练习题 提示

3.2.3-1 从 $[-1, 1]$ 起反复二分并选择含无穷多项的一半，可得到闭区间套，再按区间层级取相应下标。选左半得到趋于 -1 的子列，选右半得到趋于 1 ；在某个层级后改用另一支分法，还可以构造第 3 个收敛子列。

3.2.3-2 例如 $\{(0, 1/n)\}$ 是长度趋于 0 的开区间套，但交集为空。关键是端点是否被区间保留。

3.2.3-3 $\{a_n\}$ 递增有上界 b_1 ， $\{b_n\}$ 递减有下界 a_1 。设 $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$ 。恒有 $a \leq b$ ，故 (a, b) 的每一点都不在某个区间之外，交集非空。

3.2.3-4 设 $A \neq \emptyset$ 有上界。取 a_1 不是上界、 b_1 为上界，不断二分并保留“左端不是上界”的一半。区间套收缩到 ξ ，再由二分选择证明 $\xi = \sup A$ 。

3.2.3-5 对单调增加有上界数列, 取第一区间以首项和上界为端点, 以后根据区间中点与数列的比较不断二分, 得到闭区间套。共同点既是上确界, 也是数列极限; 单调减少情形对称。

3.3.3 练习题 提示

3.3.3-1 从每个邻域取一项并令半径趋于 0, 可得到子列; 反过来, 若子列趋于 a , 则任意邻域包含该子列的无穷多项。

3.3.3-2 若有两个不同极限的子列, 数列不可能收敛。反之, 有界且不收敛的数列由 Bolzano-Weierstrass 定理取得两个子列; 若它们的极限全相同, 则原数列收敛, 与假设矛盾。

3.3.3-3 “非无穷大量” 给出一个有界子列, 其中再取收敛子列。无界性给出使绝对值超过递增指标的子列, 可继续选取为无穷大量。

3.3.3-4 单调增加且有上界, 在数列取值上取上确界; 它作为凝聚点或极限点存在。由单调性, 任何靠近该点的项都必须收敛到它。

3.4.5 练习题 提示

3.4.5-1 (1) 是。取 $n, m > N$, 则 $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_N| + |x_m - x_N| < 2\varepsilon$ 。

(2) 不一定, 例如 $x_n = \ln n$, 但 $0 < \ln(1 + p/n) < p/n$, 而数列发散。

(3) 是。先取 $p = 1$ 得 $|x_{n+1} - x_n| \leq 1/n^2$, 所以相邻差的级数收敛, 数列为柯西列。

(4) 不一定, 例如 $x_n = \ln n$: 每个固定 p 都有 $x_{n+p} - x_n \rightarrow 0$, 但原数列发散。

3.4.5-2 数列 $\{x_n\}$ 发散, 当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对每个 N , 都存在 $n, m > N$, 满足

$$|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0.$$

也可以用 n 与 $n + p$ 的等价形式表述。

3.5.3 练习题 提示

3.5.3-1 例如取

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{k} \right) : k \geq 2 \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{k}, 1 \right) : k \geq 2 \right\}.$$

任意有限个子区间都留下未被覆盖的中间一段。

3.5.3-2 反设存在开覆盖没有有限子覆盖。连续二分区间, 始终保持“该半区间无有限子覆盖”, 得闭区间套。其共同点被某个覆盖区间包含, 当半区间足够小时整段也落入该覆盖区间, 矛盾。

3.5.3-3 若闭区间套交集为空, 则移除各区间后得到 (a, b) 的开覆盖。有限覆盖只涉及有限个端点, 会推出某个区间为空或交集非空, 矛盾。

3.5.3-4 假设有界数列无收敛子列。对闭包中的点取其邻域只含有限项，由有限覆盖定理只能覆盖有限项，与序列有无限项矛盾。

3.5.3-5 可取“ A 无上界”的例子 $A = \mathbb{N}$ ；“有上界且上确界不在 A 中”的例子 $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}_+\}$ ，取 $b = 0$ 。两个例子都对应证明中二分后选择的一侧。

3.6.4 练习题 提示

3.6.4-1 (1) 数列只在 $0, 1$ 间取值，故 $\underline{\lim} = 0$, $\overline{\lim} = 1$ 。

(2) $\sin(n\pi/4)$ 只取有限多个周期值，最大、最小值分别为 $1, -1$ ，故上下极限分别为 $1, -1$ 。

(3) 偶下标趋于 $+\infty$ ，奇下标趋于 0 ，故上极限为 $+\infty$ ，下极限为 0 。

(4) 偶下标趋于 $+\infty$ ，奇下标趋于 0 ，同样上极限为 $+\infty$ ，下极限为 0 。

3.6.4-2 取 $\{x_n\}$ 的子列实现上极限，再从其对应的 y_n 中取收敛子列；利用 $x_n \geq y_n$ 比较极限。下极限可对相反数使用同一结论。

3.6.4-3 左侧：从实现 x 下极限的子列出发，其前 k 项平均值当 $k \rightarrow \infty$ 时不小于该下极限；右侧由上极限同理。中间两个不等式是下极限不超过上极限。

3.7.3 第一组参考题 提示

3.7.3-1 有界数列的任意子列仍有界，由 Bolzano–Weierstrass 定理必有收敛子列。反过来，若数列无界，可取绝对值不断增大的子列；再适当稀疏选取，使该子列没有收敛子列，与条件矛盾。

3.7.3-2 若 $x_n \rightarrow a$ ，任何子列都有子子列收敛于 a 。反之，若 $\{x_n\}$ 有一个子列保持与 a 的正距离，则从中再选一个没有子子列收敛于 a 的子列，矛盾。

3.7.3-3 若闭区间上每一点都有一个邻域使函数有界，则这些邻域构成有限覆盖，函数在整个闭区间上有界，矛盾。开区间没有“类似结论”：例如 $1/x$ 在 $(0, 1)$ 上无界，但每个内点的充分小邻域上都有界。端点 0 不在定义域内。

3.7.3-4 对任意 $x < y$ ，由每点附近的严格单调性，可用有限覆盖把区间 $[x, y]$ 分成有限多段，在每段上函数严格增加，逐段连接得 $f(x) < f(y)$ 。

3.7.3-5 Stolz 定理可写成差分序列与分母差分的加权平均。令

$$t_{nk} = \frac{p_k - p_{k-1}}{p_n}$$

或相应的差分权重，用上、下极限夹住该加权平均；题 3.6.4-3 正是所需工具。

3.7.3-6 对非负数列，先取分别实现四个上、下极限的子列，再依据乘积的符号和大小比较。关键事实是：非负极限的相对次序在逐项相乘后保持。最后一行由 $x_n y_n$ 的上极限不超过各自上极限之积得到，前面几个不等式同理。

3.7.3-7 取对数:

$$\frac{1}{n} \ln x_n = \frac{1}{n} \ln x_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{x_{k+1}}{x_k}.$$

比值极限为 l , 由 Cesàro 命题得平均值趋于 $\ln l$, 再取指数。

3.7.3-8 若 a_n 不收敛于 a , 则存在子列始终满足 $a_n \geq a + \varepsilon$ 或 $a_n \leq a - \varepsilon$ 。该子列自身的算术平均也不可能趋于 a , 矛盾。

3.7.3-9 反设上极限小于 $1 - \eta$ ($\eta > 0$), 则从某项后

$$x_{n+1} < x_n - \frac{1 - \eta}{n} x_n.$$

反复估计可推出正数列迅速降为负数, 矛盾。取 $x_n = n \ln(n+1)$ 可验证常数 1 无法再提高, 因此为最佳值。

3.7.3-10 若上极限小于某数 $q < e$, 则对任意 $0 < \lambda < 1$ 选择足够小的 η 可使 $\frac{x_1 + x_{n+1}}{x_n} < q^{1/n} < 1 + \lambda/n$ 。递推估计 x_n 的增长, 会与正数列的存在性矛盾。取 $x_n = n$ 时表达式趋于 e , 所以 e 是最佳常数。

3.7.3 第二组参考题 提示

3.7.3-1 若对所有正整数 n 都有 $na \leq b$, 则数集 $\{na : n \in \mathbb{N}_+\}$ 有上界 b 。设其上确界为 s 。由 $s - a$ 不再是上界, 存在 $Na > s - a$, 从而 $(N+1)a > s$, 矛盾。因此某个 n 满足 $na > b$ 。

3.7.3-2 令 $s = \sup A$ 。由 $A \cup B = \mathbb{R}$ 和所有 A 中数小于所有 B 中数, 可知 $s \leq \inf B$; 若 $s \in A$, 则 A 有最大数, 且 B 无最小数; 若 $s \in B$, 则 B 有最小数, 且 A 无最大数。

3.7.3-3 取 A 的上确界 ξ 。若 $\xi \in A$, 取 B 中一列点从上方趋近 ξ ; 若 $\xi \in B$, 取 A 中一列点从下方趋近 ξ 。分隔条件保证对应的点列确实位于另一集合或边界外侧。

3.7.3-4 奇、偶项分别由两步复合映射生成, 该映射在区间靠近 2 处是压缩的, 因此奇偶子列都收敛; 一步映射关系又迫使二者极限相同。设极限为 L , 由根式结构得 $L = \sqrt{7 - \sqrt{7 + L}}$, 故 $L = 2$ 。

3.7.3-5 若 $\{x_n\}$ 不收敛, 可取两个有界子列收敛于不同极限。适当构造 $\{y_n\}$ 使其中一个子列在 $x_n + y_n$ 中占主导, 便可破坏题设的逐点上极限可加性质; 因此 $\{x_n\}$ 必须收敛。

3.7.3-6 (1) 若记录低点只有有限多个, 则从某项以后所有 x_n 都大于某个正数, 与下极限为 0 矛盾, 故记录低点无限多。(2) 若有正下界 $m > 0$, 而比值上极限小于 1, 则从某项起 $x_{n+1}/x_n \leq q < 1$, 推出 $x_n \rightarrow 0$, 与 $x_n \geq m$ 矛盾。

3.7.3-7 由递推关系

$$x_{n+1} = -\frac{p}{q}x_n + \frac{1}{q}y_n.$$

因为 $|p/q| < 1$, 迭代项构成几何衰减, 而收敛的 y_n 产生柯西型尾和, 故 $\{x_n\}$ 收敛。

- 3.7.3-8** 设 L 为 $\{x_n\}$ 的任一收敛子列的极限, 沿同一子列考察 $x_{2n} + 2x_n \rightarrow A$, 得到 $3L = A$, 即 $L = A/3$ 。有界数列的所有子列极限都只能等于 $A/3$, 故原数列收敛于 $A/3$ 。
- 3.7.3-9** 序列 $n \bmod 2\pi$ 在 $[0, 2\pi)$ 中稠密, 因此正弦值的上极限为 1、下极限为 -1 。又正弦函数连续, 稠密性使每个 $[-1, 1]$ 中的值都可作为某个子列的极限, 因此极限点集合就是 $[-1, 1]$ 。
- 3.7.3-10** 设 $c \in [l, L]$, 给定 $\varepsilon > 0$ 。取子列在 l 与 L 附近, 由 $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ 可知相邻项之间不能跳过尺度为 ε 的间隙; 在两条子列交替的位置, 必可选出落入 $U_\varepsilon(c)$ 的项。对 $\varepsilon = 1/k$ 逐次抽取并保证下标递增, 即得收敛于 c 的子列。

第 4 章 函数极限：答案与提示

思考题、练习题与参考题

4.1.3 思考题 提示

4.1.3-1 四种叙述都等价。第 (1) 种只需用 $\varepsilon/2$ 或 2ε 调整；第 (2) 种用 ε/K ；第 (3) 种取 $n > [1/\varepsilon]$ ；第 (4) 种取 n 足够大使 $1/n < \delta$ 。

4.1.3-2 (1) 不能。它要求对任意小 ε 都在同一个去心邻域内成立，只会迫使 $f \equiv A$ 。(2) 不能， ε 可以与 δ 相关，无法表达任意精度。(3) 只是直观语言，不是严格的量词叙述。

4.1.3-3 (1) 存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得对每个 $\delta > 0$ ，都存在 $x \in O_\delta(a) \setminus \{a\}$ ，满足 $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$ 。(2) 对每个实数 A ，上述正面叙述都成立。

4.1.3-4 若 $B = f(A)$ ，内层极限附近有两种情况；若 f 在 A 处不连续，复合值可能沿不同路径得到 B 、 $f(A)$ 或不收敛。因此极限只能出现题中三种可能。

4.1.5 练习题 提示

4.1.5-1 分子有理化：

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1.$$

4.1.5-2 约去 $x-1$ ：

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x-2)} = -\frac{x+2}{x(2-x)} \rightarrow -3.$$

4.1.5-3 x 足够大时 $0 < (x+1)/(x^2-x) < 2/x \rightarrow 0$ 。

4.1.5-4 分子在 $x = -1$ 时必须为零，得 $a = 4$ 。此时

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x+1)(x^2 - 5x + 4),$$

故极限为 10。

4.1.5-5 由 $4 + 2a + b = 0$ 得 $b = -4 - 2a$ 。分母为 $(x-2)(x+1)$ ，约分后要求 $(a+4)/3 = 2$ ，故 $a = 2$ ， $b = -8$ 。

4.2.3 思考题 提示

4.2.3-1 把 $x \rightarrow a^+$ 改为 $x > a$ 进入邻域的约束，把 $x \rightarrow +\infty$ 改为 $x > M$ ；唯一性、有界性、保号性、比较、夹逼、Heine 归结和 Cauchy 准则均可按定义或归结为数列相应定理。

- 4.2.3-2** (1) 若其中一个极限存在, 另一个也必须存在; 若二者都不存在, 和仍可能收敛, 例如 $f = \sin(1/x)$, $g = -\sin(1/x)$ 。(2) 不能确定。 $\lim f = 0$ 时可使 fg 收敛; 若 $\lim f \neq 0$, 则 fg 收敛会迫使 g 收敛。
- 4.2.3-3** (1) 分母 $\sin(1/(x-2))$ 无极限, 不能使用商的极限法则。(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在, 不能把无穷乘积拆成两个有限极限之积。
- 4.2.3-4** 两种方法都要先估计 $|(f+g) - (A+B)| \leq |f-A| + |g-B|$; Heine 方法则对任意 $x_n \rightarrow a$, 分别应用两个数列极限法则。
- 4.2.3-5** 夹逼定理需要两个有界或同号的控制函数。例如 $f(x) = (-1)^{[x]}x$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时 $|f(x)| \rightarrow \infty$, 却不存在确定的 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。
- 4.2.3-6** 对任意函数极限类型的 Heine 推论, 取相应数列并按原推论取子列; 用反证法可把“所有数列”与“所有子列”的收敛性统一起来。

4.2.5 练习题 提示

- 4.2.5-1** 分别用洛必达型估计、对数化、指数增长比较和 $\ln x/x \rightarrow 0$; 四种极限均为 $0, 0, 1, 1$ 。
- 4.2.5-2** 分子 $\sim y^{3/2}$, 分母 $\sim y^{3/2}$, 故极限为 1。
- 4.2.5-3** 底数为 $1 - \frac{2}{x^2+1}$, 指数趋于 1, 故极限为 $\exp(-2/x^2 \cdot 1) \rightarrow 1$ 。
- 4.2.5-4** 利用 $(1+x)^{1/n} - 1 = \frac{x/n}{1+O(x)}$, 极限为 $1/n$ 。
- 4.2.5-5**
- $$\frac{f(bx)}{x} = b \cdot \frac{f(bx)}{bx} \rightarrow bl.$$
- 4.2.5-6** 分子有理化后可约去 $\sin x$, 剩余因子的极限为 1。
- 4.2.5-7** 单调有界函数在无穷远处有有限上确界或下确界; 由单调性, 该值必为对应极限。
- 4.2.5-8** 由 $x_n \rightarrow b$ 和单调性得 $f(x) \leq A$ ($x < b$)。对任意 $x_k < b$, 令 $x \rightarrow b^-$ 并用 x_n 夹逼, 得到极限 A 。
- 4.2.5-9** 取 $\varepsilon = A - c > 0$, 由函数极限定义存在 M , 使 $x > M$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 于是 $f(x) > c$ 。

4.3.4 练习题 提示

- 4.3.4-1** 各极限依次为

$$e^{-2/\pi}, \quad 1, \quad e^{-2}, \quad 1, \quad -1, \quad \frac{2}{\pi}.$$

主要使用 $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(x^{-1})$ 、 $\ln(1+t) \sim t$ 、 $\sin x \sim x$ 以及 $t^t \rightarrow 1$ 。

- 4.3.4-2** (1) 正确值为 0; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/x} = 1$ 。两题分别说明不能直接把 $\sin x$ 当作 1, 也不能

对非标准 e 型极限盲目使用 $(1 + 1/t)^t \rightarrow e$ 。

4.3.4-3 取对数:

$$n \ln \left(1 + \frac{a^{1/n} + b^{1/n} - 2}{2} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(ab),$$

故原极限为 $\sqrt{ab}$ 。

4.3.4-4 取对数并对 $x \rightarrow 0$ 使用 $\ln(1+t) \sim t$, 得到

$$f(x) \rightarrow (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

4.3.4-5

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)} \rightarrow \frac{\sin x}{x}.$$

取 $x = \pi/2$ 即得 Viète 公式。

4.4.2 思考题 提示

4.4.2-1 $10^{-10^{10000}}$ 与 $e^{-10^{10}}$ 是固定正数, 不是无穷小量; x 与 $\sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量。 $10^{10^{10000}}$ 与 $e^{10^{10}}$ 是固定有限数, 不是无穷大量; 对固定正整数 n , $x^n \rightarrow 0$; $a^x \rightarrow 1$ ($a > 1$)。二者也不是无穷大量。

4.4.2-2 极限依次为

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0,$$

第 (6) 与第 (7) 不存在; 第 (8) 为 0。第 (6)、第 (7) 分别由 $x \sin x$ 和 $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在无穷远处及零点附近的振荡说明不存在。

4.4.2-3 (1)、(3)、(4)、(5) 成立; (2)、(6) 一般不成立。例如 $O(1)$ 中的常数 1 不是无穷小量, 而 $O(x^2)/x = O(x)$, 不能加强为 $o(x)$ 。

4.4.4 练习题 提示

4.4.4-1 各无穷小量分别为:

- (1) 一阶 x ;
- (2) 一阶 $x - a$;
- (3) 一阶 $x \ln a$ ($a \neq 1$);
- (4) $a \neq b$ 时为二阶 $x^2 \ln(a/b)$; $a = b$ 时恒为 0;
- (5) 一阶 $1 - \pi/2$;
- (6) 二阶 $(x - 1)^2$ 。

4.4.4-2 把恒等式递推 n 次:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right] + f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

前 n 项总量为 $o(x)(1-2^{-n})$; 最后一项用 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)/t$ 的有限性估计, 再令 $n \rightarrow \infty$ 。

4.4.4-3 $\ln x/x^\varepsilon \rightarrow 0$ 可由令 $t = \ln x$ 得到; $x^\varepsilon/a^x = e^{\varepsilon \ln x - x \ln a} \rightarrow 0$; $a^x/x^x = (a/x)^x \rightarrow 0$ 。连续化为 $x \rightarrow +\infty$ 的相应估计即可。

4.4.4-4 各题结果依次为

$$+\infty, \quad -1, \quad 1, \quad -\frac{1}{12}, \quad \frac{2}{3}, \quad e^{1/6}.$$

主要展开为 $\ln(1+t) \sim t$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $\arcsin t = t + O(t^3)$, 以及 $a^u - 1 = u \ln a + o(u)$ 。

4.5.2 参考题 提示

4.5.2-1 不妨设 f 单调增加。对任意 $x \in (a, b)$, 取 $x_n \in (a, x]$ (或 $x \leq x_n$) 使适当比较成立; 由 $f(x_n) \rightarrow A$ 和单调性把 $f(x)$ 夹在两侧, 得到 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ 。单调减少情形对称。

4.5.2-2 由 $x_n \geq a$ 。若某个子列与 a 始终有正距离, 则因 f 严格增加, $f(x_n) \geq f(a+\delta) > f(a)$, 与 $f(x_n) \rightarrow f(a)$ 矛盾。

4.5.2-3 (1) 一般不能只检查单调数列; 单调路径可能避开导致极限改变的非单调路径。(2) 逐步逼近 a 的路径仍可能从不同方向经过函数的不同取值; 在未附加连续条件时不能推出原归结原理。相应推论也应分别用反例或附加条件检验, 不能直接沿用。

4.5.2-4 由中值定理,

$$|\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0。若进一步展开, 主项为 $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$; 由于余弦会变号并出现零点, 只能断言 $O(x^{-1/2})$, 不能对全体 x 写成单一的等价量。

4.5.2-5 取对数:

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right) = \ln a - \frac{\ln x + O(1)}{x} \rightarrow \ln a,$$

故原极限为 a 。

4.5.2-6 (1) 在 $x=0$ 处比较 $f(x)/\sin x$ 的极限, 得到

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

(2) 相应结论为

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

对 $x \rightarrow 0^+$ 除以 x 并取极限即可。

4.5.2-7 使用 $\sin u = u - u^3/6 + o(u^3)$:

$$\sin nx - n \sin x = \frac{n(1-n^2)}{6} x^3 + o(x^3),$$

故极限为 $n(1 - n^2)/6$ 。

4.5.2-8 固定 $x \in \mathbb{Q}$ 时, 当 m 充分大, $m!x$ 为偶数, 内层极限为 1; 固定 $x \notin \mathbb{Q}$ 时 $|\cos(\pi m!x)| < 1$, 内层极限为 0。外层极限正是 Dirichlet 函数。

4.5.2 参考题 (续) 提示

4.5.2-9 (1) $f(2^n x) = f(x)$ 且 $2^n x \rightarrow +\infty$ 。由函数在无穷远处的极限存在, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $f(x) = f(+\infty)$, 故为常值。

(2) 取 $a^n x \rightarrow +\infty$ 或 $a^n x \rightarrow 0^+$, 由相应极限存在同样可使所有值相等。

4.5.2-10 迭代得

$$f(a^n x) = b^n f(x).$$

固定 x , 选取 $n = n(x)$ 使 $a^n x$ 落入 0 附近的有界区间, 则

$$|f(x)| = b^{-n} |f(a^n x)| \leq C b^{-n} \rightarrow 0.$$

因 $b > 1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时有 $n \rightarrow \infty$, 故极限为 0。

4.5.2-11 取整数 m 使 $2^m \leq a < 2^{m+1}$ 。由 f 单调, $f(2^m x)/f(x)$ 与 $f(2^{m+1} x)/f(x)$ 同时趋于 1。把 $f(ax)/f(x)$ 夹在二者之间即可; $a < 1$ 的情形用倒数或反向夹逼处理。

4.5.2-12 把区间 $(x, x+n]$ 分成 n 个长度为 1 的小区间, 利用 $f(x+n) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x+k+1) - f(x+k)]$ 。令 n 与 x 按适当比例同时增大, 并用右端极限控制平均增量, 即可得到两边的共同极限; 无穷情形由同一估计给出发散速度。

4.5.2-13 对 $\frac{f(x)}{x^{n+1}}$ 应用上一题的连续型 Stolz 思想, 比较区间 $[x, x+1]$ 上的增量:

$$(x+1)^{n+1} - x^{n+1} = (n+1)x^n + O(x^{n-1}).$$

将函数增量除以该分母并令 $x \rightarrow +\infty$, 即得结论。

4.5.2-14 沿 T 的整数倍区间累加:

$$f(a+kT) - f(a) = \sum_{j=0}^{k-1} [f(a+(j+1)T) - f(a+jT)].$$

由 $g(x+T) > g(x)$ 与 $g \rightarrow +\infty$, 用广义 Stolz 型平均, 把区间增量的共同比值 l 传递给端点的函数值之比。

4.5.2-15 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 使 $0 < |t| < \delta$ 时 $|f(t) - f(t/2)| < \varepsilon|t|$ 。当 $|x| < \delta$ 且取 n 足够大时,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right] + f\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

前一部分绝对值不超过 $\varepsilon|x| \sum 2^{-(k-1)} < 2\varepsilon|x|$, 末项因 $f(t) \rightarrow 0$ 可令 $n \rightarrow \infty$ 消去, 故 $f(x) = o(x)$ 。

第 5 章 连续函数与单调函数：答案与提示

各节练习题与第五章总练习题

5.1-1 (1) 由在 x_0 连续, 取 $\varepsilon = 1$ 得局部有界; (2) 若 $f(x_0) > 0$, 取 $\varepsilon = f(x_0)/2$ 得邻域内 $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ 。

5.1-2 直接按 ε - δ 展开复合函数 $f(g(x))$ 与 $f(x) + g(x)$ 的估计, 利用连续性控制输入误差。

5.1-3 写 $u^v = e^{v \ln u}$, 用 $\ln u \rightarrow \ln a$ 、乘积极限及指数连续性。

5.1-4 对数列取对数: $y_n \ln x_n \rightarrow b \ln a$, 再用指数连续性。

5.1-5 由 $g(0) = 0$ 和 g 在 0 连续, $g(x) \rightarrow 0$; 于是 $|f(x)| \leq c|g(x)| \rightarrow 0 = f(0)$ 。

5.1-6 (1) 可以。因 $f \in C[a, b]$, 令 $g = f$ 于 $[a, b]$, 并在区间 $I \setminus [a, b]$ 上按所在侧分别取常值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 即可。(2) 一般不能。只有当下述单侧极限存在且有限时, $f(a^+)$ 、 $f(b^-)$ 才能分别充当 a, b 处的延拓值; 例如 $\sin \frac{1}{x-a}$ 在 (a, b) 上连续, 却不能在 a 处连续延拓。

5.1-7 左连续: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; 右连续把区间改为 $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ 。

5.1-8 例如 $f(x) = x - [x]$ 。它在每个整数点右极限为 0, 故右连续; 左极限为 1, 故不左连续。若需要“左连续而不右连续”, 取 $f(x) = [x] - x$ 。

5.1-9 对 $|x|$ 使用反向三角不等式; 对 $1/\sqrt{x-1}$ 用连续函数复合与除法。

5.1-10 (1) $x \neq k\pi/2$; (2) $x \neq 0$ 。

5.1-11 关键结论: (1) 处处为第二类间断; (2) $x = 0$ 为振荡型第二类间断; (3) $x = 0$ 为可去间断, 补充 0 后连续; (4) 在定义域各连通段的端点 $k\pi$ 处有第二类间断; (5) 每个整数点为跃度为 1 的跳跃间断; (6) 恒等于 -1 , 无间断点; (7) $k\pi$ 为跃度为 2 的跳跃间断; (8) $x = 0$ 为第二类间断, $x = 1$ 为跃度为 1 的跳跃间断; (9) $x = 1, -1$ 都是跃度为 2 的跳跃间断; (10) $x = 0$ 为可去间断, 补充 e 后连续。

5.1-12 $c = 1$; 由 $x = 1$ 两侧连续得 $b = -2$, 故 $b = -2, c = 1$ 。

5.1-13 (1) 若 f 连续而 g 间断, 则 $f + g$ 必在 x_0 间断, 否则由 $g = (f + g) - f$ 连续导出矛盾。若 f, g 都间断, $f + g$ 可能连续 (取 $g = -f$), 也可能不连续。(2) 若 f 连续、 g 间断且 $f(x_0) \neq 0$, 则 fg 必间断; 若 $f(x_0) = 0$, fg 仍可能连续 (如 $f(x) = x, g = D(x)$), 也可能不连续。两个因子都间断时更无统一结论。

5.1-14 (1) 是, 每个点都落在某个 $(-G, G)$ 内; (2) 能保证 (a, b) 上连续, 但不能保证端点连续。

5.1-15 f 连续 $\Rightarrow |f|, f^2$ 连续; $|f|$ 连续 $\Leftrightarrow f^2$ 连续; $|f|$ 连续不能推出 f 连续 (取 $f(x) = 1$ 于有理数、 $f(x) = -1$ 于无理数)。

5.1-16 (1) $\sqrt{5}$; (2) $\sin 1$; (3) 分别为 1、 $\sin 1$ 、0。

5.2-1 (1) 去掉端点异号或连续性之一即可构造反例; (2) $f(x) = 0$ 恒为零; (3) 取 $f(x) = x - \frac{1}{3}$ 于 $[0, 1]$; 其零点 $1/3$ 不是任何 $m/2^n$ 形式的逐次等分点。

5.2-2 令 $h(x) = f(x) - kx$ 。因 f 与 $-kx$ 均严格递减, h 严格递减, 故交点至多一个。当 $h(a)h(b) < 0$ 时恰有一个; 若端点值异号条件不成立, 则可能无根, 因此不能只由 $k < 0$ 断定根数。

5.2-3 以 $s(t)$ 表示前 t 分钟跑过的总路程, 令 $F(t) = s(t+5) - s(t)$, $0 \leq t \leq 25$ 。若每个 $F(t)$ 都不等于 1, 则

$$F(0) + F(5) + \cdots + F(25) = s(30) - s(0) = 6$$

表明这六个数中同时存在大于 1 和小于 1 的值。由 s 及 F 的连续性, 介值定理给出某个 t 使 $F(t) = 1$ 。

5.2-4 考虑 $g(x) = f(x + (b-a)/2) - f(x)$, 在端点处符号相反, 用零点定理。

5.2-5 (1) 在 $x_k = k\pi/n$ 处符号交替, 并在相邻点间用零点定理; (2) 令 $F(x) = x^{17} + 215/(1 + \cos^3 3x) - 18$ 。有 $F(0) = -15/2 < 0$ 。又当 $x \rightarrow (\pi/3)^-$ 时, $1 + \cos^3 3x \rightarrow 0^+$, 从而是 $F(x) \rightarrow +\infty$ 。在 $[0, \pi/3)$ 上 F 连续, 故由零点定理得到实根。

5.2-6 平均值位于 f 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值之间, 用介值定理。

5.2-7 因区间连通且 f 连续, 值域为连通集; 只含有理数的连通集只能是一个点, 故 f 为常值函数。

5.2-8 令 $F(x) = 2^x - 4x$ 。 $F(0) = 1 > 0$, $F(1) = -2 < 0$, 由零点定理得根。

5.2-9 可取 $f(x) = \sin C(x)$, 其中 $C(x)$ 为 Conway 十三进制函数。 C 在任意非空区间上的值集为 $\mathbb{R}$, 所以 f 在每一点间断, 却仍具有介值性, 并且确实取得最大值 1 和最小值 -1。

5.2-10 常值、闭、开、半开、有界、无界及单点区间都可由连续函数取得, 如反三角、指数、对数、幂函数等。

5.2-11 (1) 因无穷远处趋于 $+\infty$, 取足够大的闭区间, 区间外函数值更大; 在闭区间上取最小值, 并与外部比较; (2) 研究 $f(f(x))$, 利用 $f(x_0) < x_0$ 及无穷远处增长, 在 x_0 与外部构造两个最小值点。

5.2-12 由最值定理, $f(x) \geq m > 0$, 于是

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{f(x)f(y)} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{m^2}.$$

再用 Cantor 定理。

5.2-13 三项都一致连续: 第一项导数有界; 第二项在 $(0, 1)$ 可连续延拓到 0; 第三项在 $[0, 1]$ 上可连续延拓, 故一致连续。

5.2-14 (1) 不一定, 例如 $f(x) = \sin(1/x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续有界, 但不是一致连续; (2) 是, 单调有界连续函数可连续延拓到闭区间。

5.2-15 非常数多项式在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续; 常数多项式一致连续。

5.2-16 对每个 $\varepsilon > 0$, 用一致连续取分点, 使每个小区间上 $\text{osc } f < \varepsilon$ 。

5.2-17 从 Cantor 定理得到对任意 ε 存在有限个邻域覆盖 $[a, b]$, 每个邻域内函数有界, 取有限个界中的最大值。

5.2-18 由 f 在 $[a, b]$ 上一致连续, 或由 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 的 Cauchy 判别, 端点附近任意两值之差趋于零, 故左极限存在。

5.2-19 取 $\delta = \varepsilon/L$, 对任意 $|x' - x''| < \delta$ 直接由 Lipschitz 不等式得到。

5.2-20 (1) 是; (2) 不一定。 $f = x$, $g = x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 但 $fg = x^2$ 不一致连续。

5.2-21 取 $\varepsilon_0 = |A|/2$, 若一致连续则两个相邻点函数值差应趋于零, 与极限为 $A \neq 0$ 矛盾。

5.2-22 (1) f 与 $g = ax + b$ 的差趋于 0, 故 f 一致连续; (2) 同理, f 一致连续; (3) 仅从 $f(x) - x^2 \rightarrow 0$ 不能推出 f 一致连续。一般地, 若 $f - g \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) 且 g 一致连续, 则 f 一致连续; 若 g 不一致连续, 则 f 可能一致连续, 也可能不一致连续。

5.2-23 对给定 $\varepsilon > 0$, 取一致连续的 δ ; 由 $\{x_n\}$ 基本, 充分大后 $|x_n - x_m| < \delta$, 故 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ 。

5.3-1 若 f 不严格单调, 则存在 $x_1 < x_2$ 但函数值反向或相等; 连续性与介值定理会破坏单射性。故必须严格单调。

5.3-2 单调函数的值域为区间, 反函数的存在性由介值定理; 严格单调性给出单射, 值域内的值由介值定理唯一对应。

5.3-3 严格单调减少时:

$$f([a, b]) = (f(b), f(a)) \cup \{f(a), f(b)\}, \quad f((a, b)) \subseteq (f(b), f(a)).$$

若进一步假定 f 连续, 便有 $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$, $f((a, b)) = (f(b), f(a))$ 。没有连续性时, 开区间的像可能缺端点之外的值, 不能只由单调性写成一个区间。

5.3-4 在相邻不连续点之间取跳跃处的单侧极限; 单调性保证这些跳跃区间互不重叠。

5.3-5 单调函数的单侧极限一定存在 (广义意义下)。例如

$$f(x) = \arctan x: \quad f(0^+) = 0, \quad f(+\infty) = \pi/2;$$

$$f(x) = 1/x: \quad f(0^+) = +\infty, \quad f(+\infty) = 0;$$

$$f(x) = x: \quad f(0^+) = 0, \quad f(+\infty) = +\infty;$$

$$f(x) = x - \frac{1}{x}: \quad f(0^+) = -\infty, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

这分别给出 (有限, 有限)、(无穷, 有限)、(有限, 无穷)、(无穷, 无穷) 四种组合的代表。

总-1 (1) 迭代 $f(x) = f(x/2^n)$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由 0 处连续得 $f(x) = f(0)$; (2) 迭代 $f(x) = f(x^{2^n})$, 若 $x > 1$ 得趋于 $+\infty$ 的对应值, 若 $0 < x < 1$ 得趋于 0; 在 0, 1 的连续性与 $x = 1$ 处匹配, 得常数。

总-2 分段函数只可能在 $f(x) = \pm c$ 的零点处改变表达式; 三部分的边界值相等, 故拼接仍连续。几何上是把图像截断在 $[-c, c]$ 内。

总-3 (1) Dirichlet 函数; (2) $f(x) = x^2 D(x)$; (3) 取 $f(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)^2 D(x)$ 。

总-4 由 $x_n^n \rightarrow a$, $y_n^n \rightarrow b$ 得 $x_n \rightarrow a^{1/n}$ 型的渐近关系; 取对数:

$$n \ln(px_n + qy_n) \rightarrow p \ln a + q \ln b = \ln(a^p b^q),$$

再用指数连续性。

总-5 取上确界 $\sup f([a, b])$, 由确界逼近取 x_n , 再用收敛子列和连续性证明最大值达到; 最小值同理。

总-6 令 $h(x) = f(x) - x$, 利用 $f([a, b]) \subset [a, b]$ 得 $h(a) \geq 0, h(b) \leq 0$, 由介值定理得零点。

总-7 由 $f([a, b]) \supset [a, b]$ 可取满足 $f(u) \leq a$ 与 $f(v) \geq b$ 的点, 对 $f(x) - x$ 在合适子区间使用零点定理。

总-8 迭代映射 $F = f \circ^n$ 为恒等映射, 故 f 必为双射; 连续单射在区间上严格单调。若 $f(x) > x$ 于某点, 由端点条件 $f(1) = 1$ 产生矛盾; 反向同理, 故 $f(x) = x$ 。

总-9 不等式说明 f 为单射且逆映射 Lipschitz; 并且 f 在无穷远处绝对值趋于无穷, 故值域既无上界也无下界; 连续性给值域为连通区间, 故为 $\mathbb{R}$ 。

总-10 设 $M = \sup_{[a, b]} f$, 按 M 的定义取点列逼近, 抽收敛子列, 由连续性得达到上确界; 类似处理下界。

总-11 最值定理由有限覆盖: 若上确界不达到, 可取覆盖排除上确界附近的点, 再用有限个区间的一致控制导出矛盾。

总-12 M, m 分别是 $[a, x]$ 上连续函数的最大、最小值。对有界闭区间用最值定理; 再用 $x \rightarrow x_0$ 时区间变化足够小, 证明左右极限等于 $M(x_0), m(x_0)$ 。

总-13 若一致连续, 则取 δ 使距离小于 δ 时函数差小于 ε ; 把条件中的差商阈值 A 取为 $1/\delta$ 即可。反向由条件可直接得到一致连续。

总-14 由 Cantor 定理取分割, 使每个小区间上函数振幅小于 ε , 在相邻分点间用线性插值连接。

总-15 若每个扩展区间上一致连续, 则限制到 (a, b) 上也一致连续; 端点附近由扩展区间控制。

总-16 (1) 零点存在、值域和最值定理可用延拓 $g(b) = B$ 后使用; 有界性也成立。Cantor 定理需函数在闭区间连续, 延拓后可成立; (2) $b = +\infty$ 且 $f(x) \rightarrow B$ 时, 零点定理与有界性仍成立; 最值不一定存在, 例如 $f(x) = -e^{-x}$ 有界却没有最大值。Cantor 定理 (一致连续) 也仍成立。

总-17 设 f 一致连续并不趋于 0, 则可取 $x_n \rightarrow +\infty$ 使 $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$; 由 $f(x+n) \rightarrow 0$ 取出靠近 x_n 的点, 与一致连续矛盾。

总-18 若 $f(x) \geq 0$ 且 $f(0) = f(1) = 0$, 考虑 $h(x) = f(x) - f(x+\alpha)$, 在覆盖 $[0, 1-\alpha]$ 的对应点处符号相反, 用零点定理。去掉非负条件后不一定成立。

总-19 利用 $f(0) = f(1)$, 将 $f(k/n)$ 的循环差和为零; 若所有相邻差都同号则矛盾, 故存在相邻差异号, 再用介值定理。

总-20 (1) 由上半连续定义取 $\varepsilon = -f(x_0)/2$; (2) 对每点取局部上界邻域, 利用有限覆盖取有限个上界; (3) 先证有上界, 再取上确界 M 与逼近点列, 抽收敛子列并用上半连续性证明 M 被达到。