

高等代数 第一章 行列式

习题选编参考答案与题解

依据习题册《第一章 行列式 高等代数习题选编》整理 · 2026 年 10 月

解法范围：只使用行列式的定义、行列式的行（列）变换、按行（列）展开、拆分、递推、Vandermonde 行列式、升阶和 Laplace 展开。后文会用到的代数恒等式均在题解中说明。

使用说明与原册勘误

原册共十讲，页 2 至 91 给出例题和练习，页 92 以后只列部分最终结果。以下按原册顺序逐项对应；被不同讲次重复选用的同一行列式，会明确交叉引用，并补充新要求的方法。

核对时发现原册有两类需要特别说明的问题：

1. 第 3 讲例 1.26 所印矩阵的一般行列式并不是 $a_0 a_1 \cdots a_n$ 。按题面计算，其值应为

$$e_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{0 \leq i_0 < \cdots < i_{n-1} \leq n} a_{i_0} \cdots a_{i_{n-1}}.$$

例如 $n = 2$ 时，行列式为 $a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2$ 。

2. 第 4 讲练习 2、第 9 讲练习 3 所印矩阵都是形如 $1 + u_i v_j$ 的矩阵。每一列都是两个固定列向量的线性组合，故当 $n \geq 3$ 时三列线性相关，行列式为 0； $n = 2$ 时的正确结果是

$$(u_1 - u_2)(v_1 - v_2).$$

原答案中的 $1 + \sum u_i v_i$ 对应的是另一个矩阵 $\delta_{ij} + u_i v_j$ ，并非题面所印矩阵。

3. 第 5 讲练习 2 的题面矩阵最后一列是 $\prod_{j \neq i} x_j$ ，没有除以 $\prod_i x_i$ 。正确结果为

$$(-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

第一讲 降阶法

例 1.1

从最后一列起, 依次作 $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, 再按各行非零位置逐步消去, 可化为上三角行列式, 其主对角线元素为 $1, 2, \dots, n$ 。因此

$$|A| = 1 \cdot 2 \cdots n = n!.$$

例 1.2

对所有 $i = 2, \dots, n$, 作

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{b_i}{a_i} R_i.$$

这些变换不改变行列式, 得到上三角行列式:

$$|A| = a_2 \cdots a_n \left(a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_i} \right) = \prod_{i=1}^n a_i \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i c_i}{a_1 a_i} \right).$$

例 1.3

把第 i 行减去 x_i 倍的第一行 (或先把首行拆成一个行向量与零行之和), 可把矩阵化为对角形。等价地, 令 J 为全 1 矩阵,

$$A = \text{diag}(-a_1, \dots, -a_n) + x \mathbf{1}^T,$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 。由

$$\det(D + uv^T) = \det D(1 + v^T D^{-1}u)$$

得

$$|A| = (-1)^n a_1 \cdots a_n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \right) = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

例 1.4

记所给矩阵为 $A = (c_{ij})$ 。利用 Pascal 恒等式

$$\binom{m+1}{k} - \binom{m}{k} = \binom{m}{k-1},$$

依次作列差 $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ (自右向左), 再作相应的行差, 可把矩阵化为对角线上全为 1 的三角形。故

$$|A| = 1.$$

例 1.5

矩阵除主对角线全为 a 外, 仅有右上角和左下角两个元素为 1。分别按第一行、第一列展开, 只保留非零项, 得

$$|A| = a^n - a^{n-2}.$$

例 1.8

把最后一列拆成

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} x_n$$

与最后一行的 $y_1, \dots, y_n, 1$ 对应, 并按最后一列展开。右上角那个 1 的余子式就是 $|A|$; 其余 x_i 对应的项, 在取最后一行的某个 y_j 后, 正好是 $-A_{ij}x_iy_j$ 。因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 1 \end{vmatrix} = |A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}x_iy_j.$$

练习 1

矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

自下而上作 $R_i \leftarrow R_i - R_{i-1}$, 再作相应列变换, 可化为反对角三角形, 非零对角元绝对值为 $1, 1, \dots, 1, n$ 。因此

$$|A| = (-1)^{n-1}n.$$

练习 2

矩阵元素为 $a_{ij} = |i - j|$ 。先作 $R_i \leftarrow R_i - R_{i-1}$, 再作 $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, 可降为只含相邻元素 1 和主对角线 0 的阶数较低行列式。继续递推, 得

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

练习 3

(1) 记矩阵为 $J + D$, 其中

$$D = \text{diag}(x, -x, y, -y), \quad J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T.$$

由行列式拆分及 J 只有一行, 得

$$|A| = |D| \left(1 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} \right) = x^2 y^2.$$

(2) 所给矩阵为 $J - I$ 。把第 $2, 3, \dots, n$ 行加到第 1 行, 再作列差化简, 可得

$$|J - I| = (n-1)(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

(3) 矩阵为 $bI + \mathbf{1}a^T$, 其中 $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ 。把第一行分别消去其余各行中的首项, 可得

$$|A| = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

练习 4

记

$$B = \prod_{i=2}^n b_i.$$

按第一行展开, 每一项只留下一个低阶反对角行列式; 整理得到

$$|A| = B \left[a_1 + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \frac{a_j c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}{b_2 b_3 \cdots b_j} \right].$$

练习 5

矩阵元素为

$$a_{ij} = a_{\min(i,j)} b_{\max(i,j)}.$$

依次自下而上作 $R_i \leftarrow R_i - R_{i-1}$, 再按第一列展开, 可化为相邻二项式乘积组成的三角形行列式, 故

$$|A| = (-1)^{n-1} a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i).$$

第二讲 求和法

例 1.17

循环矩阵的每一行元素相同，只是顺序不同，所以每行之和都等于

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

(三次方程缺二次项)。把第 2、3 列加到第 1 列后，第 1 列全为零，因此

$$|A| = 0.$$

例 1.20

记矩阵 A 的第 i 行和为 s_i ，全 1 矩阵为 J 。则

$$b_{ij} = s_i - a_{ij}.$$

逐行看，这正是

$$B = AJ - A = A(J - I).$$

而 $J - I$ 是对角元为 0、其余元为 -1 的矩阵，其行列式为

$$|J - I| = (-1)^{n-1}(n-1).$$

所以

$$|B| = |A||J - I| = (-1)^{n-1}(n-1)|A|.$$

例 1.18

该矩阵为 $J - I$ 。把第 2、3、 $\cdots$ 、 n 行都加到第 1 行，再作列差，可得

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1).$$

例 1.19

把第 i 行减去第 1 行 ($i \geq 2$)，得到

$$\begin{pmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ -b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

再把第 2 至 n 列都加到第 1 列，矩阵成为下三角：

$$\begin{pmatrix} b + \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

所以

$$|A| = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

例 1.21

把第 $2, 3, \dots, n$ 行加到第一行。新第一行每个元素都是

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

再对列作差, 可把其余各行化成 $(-n, \dots, -n)$ 型常数行; 整理得到

$$|A| = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

练习 1

该 4 阶循环矩阵的每一行都含四个根 $x_1, \dots, x_4$, 故每行之和为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

(所给四次方程缺三次项)。把后三列加到第一列, 第一列全为零, 故

$$|A| = 0.$$

练习 2

该行列式就是第一讲例 1.3 的行列式。用“先把所有行相加、再拆行”的求和法可得到同一结果:

$$|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

第三讲 递推法与数学归纳法

例 1

按最后一行展开：最后一行只有左边的 c_{n-1} 与对角元 a_n 。两个非零项分别给出 $-c_{n-1}b_{n-1}D_{n-2}$ 和 a_nD_{n-1} ，所以

$$D_0 = 1, \quad D_1 = a_1,$$

$$D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

例 1.23

在上一题中取 $a_n = a$, $b_{n-1} = b$, $c_{n-1} = c$ ，得到

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

对应特征方程

$$t^2 - at + bc = 0.$$

设两根为 α, β ，由初值解递推式：

- 若 $\alpha \neq \beta$,

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

- 若 $\alpha = \beta = a/2$ (即 $a^2 = 4bc$),

$$D_n = (n+1) \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

例 1.24

记左端为 D_n 。沿最后一行展开，得到

$$D_n = 2 \cos x D_{n-1} - D_{n-2}.$$

初值为 $D_1 = \cos x$, $D_2 = 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ 。由三角恒等式

$$\cos(nx) = 2 \cos x \cos((n-1)x) - \cos((n-2)x)$$

及数学归纳法，得到

$$D_n = \cos nx.$$

例 1.22

按第一列展开, 得到递推关系

$$D_n = (1 - a_1)D_{n-1} + a_1a_2D_{n-2}$$

(其中等价地可继续展开第二项)。由 $D_1 = 1 - a_1$ 、 $D_2 = 1 - a_1 + a_1a_2$, 归纳得

$$D_n = 1 - a_1 + a_1a_2 - a_1a_2a_3 + \cdots + (-1)^n a_1a_2 \cdots a_n.$$

例 1.25

记

$$P_y = \prod_{i=1}^n (x_i - y), \quad P_z = \prod_{i=1}^n (x_i - z).$$

依次作 $R_i \leftarrow R_i - (y - x_i)R_1$ 类型的消元 (对 y, z 作相应处理), 可把行列式化为只与 P_y, P_z 有关的一阶递推式, 从而得到

$$D_n = \frac{zP_y - yP_z}{z - y} \quad (y \neq z).$$

当 $y = z$ 时取极限:

$$D_n = P_y + y \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_j - y).$$

例 1.16 (Cauchy 行列式)

从第 2 行起逐行作

$$R_i \leftarrow R_i - R_1,$$

再对相邻行提取公因子, 最后得到 Vandermonde 行列式的乘积。结果为

$$|A| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

例 1.26

按题面所示矩阵, 记

$$D_n = |A_n|.$$

沿最后一行展开得递推式

$$D_n = (a_{n-1} + a_n)D_{n-1} - a_{n-1}^2 D_{n-2}.$$

由 $D_1 = a_0 + a_1$, 可证明

$$D_n = e_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

即 $a_0, \dots, a_n$ 中每次取 n 个相乘后求和。原册所写 $D_n = a_0 a_1 \cdots a_n$ 对 $n \geq 2$ 一般不成立; 例如 $n = 2$ 时正确值是 $a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2$ 。

例 1.7

当 $n = 3$ 时, 三阶 ± 1 矩阵的行列式是 4 的倍数, 而 $|A| \leq 4$, 故

$$|A| \leq \frac{2}{3} \cdot 3!.$$

设结论对 $n-1$ 阶成立 ($n-1 \geq 3$)。按第一行展开, 共有 n 个 $n-1$ 阶代数余子式, 每个绝对值不超过 $\frac{2}{3}(n-1)!$ 。因此

$$|A| \leq n \cdot \frac{2}{3}(n-1)! = \frac{2}{3}n!.$$

例 1.9

把行列式按组合定义展开:

$$F(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{r=1}^n f_{r, \sigma(r)}(t).$$

对 t 求导时, 乘积法则使每一列恰好被求导一次, 得到 n 个行列式之和:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f'_{1j}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & f'_{nj}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

练习 1

记矩阵

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & \\ -1 & a_2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & a_n \end{vmatrix}, \quad (a_1 \cdots a_k) = 1 \quad (k < 1).$$

按第一列展开,

$$(a_1 \cdots a_n) = a_1(a_2 \cdots a_n) + (a_3 \cdots a_n).$$

反复使用得

$$\frac{(a_1 \cdots a_n)}{(a_2 \cdots a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}},$$

即题中连分数等式。

练习 2

按第一行展开并利用爪型结构, 可化为

$$D_n = (a_1 - \sum_{i=2}^n b_i c_i / a_i) \prod_{i=2}^n a_i,$$

即第一讲例 1.2 的结果。

练习 3

沿第一行递推, 所得递推关系与第一讲例 1.3 相同。归纳得

$$|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

练习 4

按第一行展开并逐次递推, 得到

$$D_n = \left(\prod_{i=2}^n b_i \right) \left[a_1 + \sum_{j=2}^n (-1)^{j-1} \frac{a_j c_1 c_2 \cdots c_{j-1}}{b_2 b_3 \cdots b_j} \right].$$

练习 5

令 $D_n = |A_n|$ 。作 $R_i \leftarrow R_i - \frac{a_i}{a_{i-1}} R_{i-1}$ 型的逐行消元并归纳, 可得

$$D_n = (-1)^{n-1} a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i).$$

练习 6

按反对角线展开, 每次降阶后得到相同结构。反复递推, 得

$$|A| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} ab \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-2-k} b^k.$$

(原答案页对指数与求和上限有排版错误; 上式可用 $n = 2, 3$ 直接检验。)

练习 7

按第一行展开, 所得递推式的差分运算使得每降一阶都出现因子 $x - 1$, 并且初值为 $x - 1$ 。故

$$|A| = (x - 1)^n.$$

练习 8

按第一列展开, 可化为递推式

$$D_n = xD_{n-1} - (n-1)^2 D_{n-2}.$$

其根为

$$x + n - 1 - 2k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

所以

$$|A| = \prod_{k=0}^{n-1} (x + n - 1 - 2k).$$

第四讲 拆分法

例 1.32

把 $A(t)$ 的第 j 列写成“原第 j 列”与“常数向量 $t\mathbf{1}$ ”之和：

$$\text{col}_j(A(t)) = \text{col}_j(A(0)) + t\mathbf{1}.$$

应用行列式的列可加性。若展开式中至少两列取的是 $t\mathbf{1}$ ，该行列式有两列相同，值为零；只剩：

- 所有列都取原列，值为 $|A(0)|$ ；
- 恰好第 j 列取 $t\mathbf{1}$ ，值为

$$t \sum_{i=1}^n A_{ij}.$$

于是

$$|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

例 1.33

把矩阵写成

$$A = (a-b)I_n + uv^T, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^T = (b, \dots, b, c).$$

直接作列差亦可得到同样结果：

若 $b \neq c$,

$$|A| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c};$$

若 $b = c$,

$$|A| = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b).$$

例 1.43

记

$$M = (f_j(a_i))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

每个 f_j 的次数不超过 $n-2$ ，故可写成

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{n-2} c_{kj} x^k.$$

于是矩阵 M 的每一列都是下面 $n-1$ 个列向量的线性组合:

$$(1, a_i, \dots, a_i^{n-1})^T \quad (i = 1, \dots, n).$$

对该行列式反复使用列的可加性与“线性组合列”拆分, 每个展开项都有两列完全一样 (都来自 $1, a, \dots, a^{n-2}$ 的同一组 $n-1$ 个向量), 故每项为零。因此

$$\det M = 0.$$

例 $I + \alpha\alpha^T$

矩阵为

$$I + \alpha\alpha^T, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

若所有 $\alpha_i \neq 0$, 用行列式公式

$$\det(D + uv^T) = \det D(1 + v^T D^{-1}u)$$

取 $D = I$, 得

$$D_n = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

原式两边都是 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的多项式, 所以对出现零分量的情形也由多项式恒等继续成立。

练习 1

这是第一讲例 1.3。把 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 与全 1 行向量拆分, 并利用

$$\det(D + uv^T) = \det D(1 + v^T D^{-1}u),$$

得

$$|A| = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

练习 2

题面矩阵为

$$A = \mathbf{1}\mathbf{1}^T + xy^T.$$

当 $n \geq 3$ 时, 它至多由两个线性无关的列向量

$$\mathbf{1}, \quad x$$

生成, 而列数 $n \geq 3$, 故

$$|A| = 0.$$

当 $n = 2$ 时直接计算得

$$|A| = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2).$$

原答案中的 $1 + \sum x_i y_i$ 不属于题面所印矩阵。

练习 3

记主三对角矩阵 T_n (主对角 $1 + x^2$, 相邻副对角 x) 的行列式为 Δ_n 。它满足

$$\Delta_n = (1 + x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2},$$

故

$$\Delta_n = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}.$$

与主三对角矩阵相比, 题中矩阵仅将位置 $(2, 1)$ 的 x 改成 $x + x^2$ 。对增加部分按含非零元素的行列展开, 可得

$$|A| = \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} + x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

右端按多项式恒等式理解 $x^2 = 1$ 时的取值。

练习 4

记 c_{ij} 为 B 在 (i, j) 处的代数余子式, A_{ij} 为 A 的代数余子式。

对第 i 行之外的行逐行作差分, 可把 c_{ij} 与 A_{ij} 化为同一个 $n - 1$ 阶行列式; 追加的常数 b 在这些差分中消去。因此

$$c_{ij} = A_{ij},$$

从而两组代数余子式之和相等。

取偶数阶反对称矩阵 $A = A'$, 其中 $A' = -A$ 。加入 $J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 后得到 $B = A + bJ$ 。把每一列拆成原列与 $b\mathbf{1}$ 之和, 再由 $A' = -A$ 及偶数阶转置符号, 交叉项成对抵消, 最终得到

$$|A + bJ| = |A|.$$

练习 5

记 $V = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$, 则 $|A| = \det V$ 。利用余子式的矩阵形式和恒等式

$$\det(V + uv^T) = \det V + \sum_{i,j=1}^n u_i v_j A_{ij},$$

分别取 $u = (x_i^{2019})$ 、 $v = \mathbf{1}$, 以及 $u = \mathbf{1}$ 、 $v = (j^{70})$ 。由 Vandermonde 行列式中“增加 x_i^n 列”的恒等式和余子式求和恒等式, 可得所求和为

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 2019} (x_j - x_i) \left(2 - \prod_{i=1}^{2019} (1 - x_i) \right).$$

第五讲 Vandermonde 行列式

例 1.27

第 i 行可写成

$$a_i^{n-1}, a_i^{n-2}b_i, \dots, b_i^{n-1}.$$

把第 i 行提出 b_i^{n-1} , 再交换列的顺序, 得到一个以 a_i/b_i 为节点的 Vandermonde 行列式。整理得到

$$|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i).$$

例 1.28

已知 $f_k(x)$ 是首项系数为 1 的 k 次多项式。对每一列 $f_k(x_i)$, 依次减去前面各列的适当倍数, 可把 f_k 降为 x^k 。因此

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

例 1.29

切比雪夫多项式 T_k 的首项系数为 2^{k-1} ($k \geq 1$), 且

$$\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta).$$

对列作多项式降次后, 得

$$|A| = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

例 1.30

由

$$\sin(k\theta) = \sin \theta U_{k-1}(\cos \theta)$$

以及 U_{k-1} 的首项系数 2^{k-1} , 可把每一行提出 $\sin \theta_i$, 再作列降次, 得到

$$|A| = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sin \theta_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i).$$

例 1.31

若 $f(b_i) = 0$ ($i = 1, \dots, n+1$), 则系数 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_{n+1} & \cdots & b_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

系数矩阵是 Vandermonde 矩阵, 且 b_i 互不相同, 因此其行列式非零。齐次方程组只有零解, 即

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

练习 1

记 $p_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$, 题设给出

$$p_k = r, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+1.$$

由 Newton 恒等式可依次求出初等对称多项式:

$$e_k = \binom{r}{k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

因此以 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为根的多项式为

$$\prod_{i=1}^n (t - \lambda_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k t^{n-k} = t^{n-r} (t-1)^r.$$

所以这 n 个数的重根集合中恰有 r 个等于 1, 其余 $n-r$ 个等于 0。这里 Newton 恒等式来自把 p_k 与初等对称多项式的递推关系逐项展开; Vandermonde 行列式保证由幂和 $p_0, \dots, p_{n-1}$ 可唯一确定这组根。

练习 2

矩阵前 $n-1$ 列恰是 Vandermonde 矩阵的前 $n-1$ 列; 最后一列是

$$\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_i}.$$

设 $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ 。由 Vandermonde 列关系, 第 $n-1$ 次以上幂可由前 n 列确定; 计算最后一列的相应系数, 得到

$$|A| = (-1)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

第六讲 升阶法

例 1.34

记

$$W = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T.$$

原矩阵可写成

$$W + \mathbf{1}\mathbf{1}^T.$$

升阶为

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & W \end{vmatrix} = \det W (1 + \mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1}) = \det W + \det(W + \mathbf{1}\mathbf{1}^T).$$

故

$$|A| = \det W (1 + \mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1}).$$

例 1.35

从完整 Vandermonde 行列式

$$V = (x_i^j)_{0 \leq j \leq n}$$

中删去第 $i+1$ 列 x^i 。由升阶或按删去的列展开, 可得

$$|A| = \left(\prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_s - x_r) \right) e_{n-i}(x_1, \dots, x_n),$$

其中 e_{n-i} 是 $n-i$ 次初等对称多项式。

例 1.36

所给矩阵为

$$a\mathbf{1}^T + \mathbf{1}a^T - 2 \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

升阶并作行、列消元, 或把每项 $a_i + a_j$ 拆开后逐列分配, 整理得

$$|A| = (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left((n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right) \right).$$

练习 1

矩阵第一列为全 1; 第 $j+1$ 列为

$$x_i^j(x_i - a) = x_i^{j+1} - ax_i^j.$$

依次作

$$C_{j+1} \leftarrow C_{j+1} + aC_j \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

可化为

$$(1, x^2, x^3, \dots, x^n).$$

直接展开或用 Vandermonde 公式:

$$|A| = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right) e_{n-1}(x_1, \dots, x_n).$$

第七讲 求根法

例 (Vandermonde 行列式)

把

$$D_n = D_n(x_1, \dots, x_n)$$

看成关于 x_n 的多项式。若 $x_n = x_i$ ($i < n$), 则第 n 行与第 i 行相同, 故 $D_n = 0$ 。于是

$$\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \mid D_n(x_n).$$

该多项式关于 x_n 的次数为 $n - 1$, 首项系数为 $D_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ 。归纳得

$$D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

例 1.41

把左端记为 $F(x)$ 。分别取 $x = 0, \pm 1, \pm 2$, 通过行、列相减可验证

$$F(0) \neq 0, \quad F(\pm 1) = F(\pm 2) = 0.$$

$F(x)$ 是四次多项式, 并且比较最高次项 x^4 的系数得到首项系数 -3 。故

$$F(x) = -3(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

例 1.43

该行列式的每一列是次数不超过 $n - 2$ 的多项式 f_j 在 $a_1, \dots, a_n$ 处的取值列。每个这样的列可写成

$$1, a, a^2, \dots, a^{n-2}$$

这 $n - 1$ 个列向量的线性组合。由行列式的列线性性展开, 每项至少两次使用同一个幂向量, 故含有两列相同, 恒为零。因此

$$\det(f_j(a_i)) = 0.$$

例 1.12

先作

$$R_1 \leftrightarrow R_2, \quad R_3 \leftrightarrow R_4,$$

再依次使用 $R_1 + R_2, R_1 - R_2, R_3 + R_4, R_3 - R_4$ 及相应的列变换, 可把矩阵化为只含

$$x + y + z + w, \quad x + y - z - w, \quad x - y + z - w, \quad x - y - z + w$$

的三角形。按对角线相乘即得

$$|A| = (x + y + z + w)(x + y - z - w)(x - y + z - w)(x - y - z + w).$$

例 1.14

矩阵可写成

$$J + \text{diag}(x, -x, y, -y).$$

对全 1 矩阵 J 作行列式拆分, 得到

$$|A| = |D| \left(1 + \sum_{i=1}^4 d_i^{-1} \right) = x^2 y^2.$$

例 1.15

把每一行拆成平方项与交叉项之和, 并利用三行相加后的公因子 $(a + b + c)^2$, 可以得到

$$|A| = 2abc(a + b + c)^3.$$

直接展开也与右边相符。

例 1.16

作连续的行差

$$R_i \leftarrow R_i - R_1 \quad (2 \leq i \leq n),$$

再对每一条修改后的行提取 $a_i - a_1$, 对列提取相应的 $b_j - b_1$, 最后得到两个 Vandermonde 行列式之积。于是

$$|A| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

练习 1

记

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

所给矩阵可写成

$$M = V^T V, \quad V = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n, 0 \leq j \leq n-1},$$

其中 V 是以 $x_1, \dots, x_n$ 为节点的 Vandermonde 矩阵。故

$$|A| = |V^T| |V| = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right)^2.$$

第八讲 组合定义

例 1.10

若零元超过 $n^2 - n$ 个, 则非零元少于

$$n^2 - (n^2 - n) = n$$

个。但行列式展开的每一项都要取 n 个不同位置上的元素, 因此每一项至少含一个零元。故

$$|A| = 0.$$

例 1.9

沿用行列式的组合展开:

$$F(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{r=1}^n f_{r, \sigma(r)}(t).$$

对 t 求导, 乘积法则每次只让一列中的元素出现导数, 故

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f'_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f'_{nj} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.11

展开行列式时:

- 取全部对角元 $x - a_{ii}$, 乘积的首项为 x^n , 因此最高次项系数为 1;
- x^{n-1} 项只能由“除一个因子外, 其余 $n-1$ 个都选对角元”产生, 其系数为

$$-(a_{11} + \cdots + a_{nn}).$$

所以 $f(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式, 且 x^{n-1} 的系数为

$$-(a_{11} + \cdots + a_{nn}).$$

例 1 (共轭行列式)

行列式按组合定义展开:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

对等式两端取共轭并利用复数共轭保持加法和乘法, 得

$$\overline{|A|} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \overline{a_{1,\sigma(1)}} \cdots \overline{a_{n,\sigma(n)}} = \overline{|A|}.$$

例 2

设 $d = |A| \neq 0$ 。题设说明 $d \mid a_{ij}$ 对每个元素成立。由代数余子式公式，每个余子式 A_{ij} 是 $n-1$ 个元素的乘积之和，因而也被 d^{n-1} 整除。于是

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^*,$$

其中 $A^* = (A_{ji})$ ，是整数矩阵。

由于 $AA^{-1} = I$ ，两边取行列式：

$$d \cdot |A^{-1}| = 1.$$

两个整数之积为 1，所以

$$d = \pm 1.$$

例 (反对称行列式)

设 n 为奇数，且 $a_{ji} = -a_{ij}$ 。由转置行列式的性质，

$$|A'| = |A|.$$

但每转置一次，利用每列提出一个负号，得

$$|A'| = (-1)^n |A| = -|A|.$$

于是

$$|A| = -|A|,$$

从而 $|A| = 0$ 。

练习 1

题中矩阵恰好是 2016 阶置换矩阵。对每个置换矩阵 P_σ ，

$$|P_\sigma| = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

故

$$\sum_{A \in \Gamma} |A| = \sum_{\sigma \in S_{2016}} \operatorname{sgn}(\sigma) = 0,$$

因为置换 σ 与其与换位 (12) 的复合具有相反符号，二者两两抵消。

练习 2

记矩阵 $A = (\alpha_{ij})$, 其中 $j \leq i$ 时 $\alpha_{ij} = 1$, $j > i$ 时 $\alpha_{ij} = -1$ 。展开式第 σ 项的符号为

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \alpha_{i, \sigma(i)}.$$

把乘积符号吸收进矩阵元素。设

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, & j \leq i, \\ -1, & j > i. \end{cases}$$

作列差 $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, 可算得

$$\det T = 2^{n-1}.$$

而 $\det T = (\text{正项数}) - (\text{负项数})$, 总项数为 $n!$, 因此

$$\text{正项数} = \frac{n! + 2^{n-1}}{2}.$$

练习 3

记

$$V_k = (\mathbf{1}, x, \dots, x^{k-2}, x^k, \dots, x^{n-1})$$

为去掉 x^{k-1} 列的 Vandermonde 矩阵, 则 D_k 是把 V_k 的第 k 列换成

$$\frac{d}{dx}(x^{n-1})$$

所得行列式。对参数化的完整 Vandermonde 行列式求导, 并把各列导数依次放入这些替换列, 得到

$$\sum_{k=1}^n D_k = 0.$$

(亦可逐列展开: 所有非零项两两成对抵消。)

练习 4

记 $e_s = e_s(a_1, \dots, a_n)$ 。把原矩阵按第一列拆成 “0、1、 a 、 $a^2, \dots$ ” 的组合列, 并利用 Vandermonde 行列式的列替换公式, 得到

$$|A| = - \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right) \left[n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)e_s \right].$$

练习 5

模 2 考察。因为 a_{ii} 为偶数、且 $a_{ij} + a_{ji}$ 为偶数，所以

$$\overline{A}$$

是主对角线全零、且关于主对角线对称的矩阵。于是 $\overline{A}' = \overline{A} = -\overline{A}$ (在模 2 中正负号相同)，即为奇数阶交替矩阵。交换任意两行会使值变号，而在模 2 中“变号”仍是同一个值；将排列两两配对即可知道所有项相互抵消。故

$$\overline{|A|} = 0,$$

即 $|A|$ 为偶数。

第九讲 Laplace 定理

例 1.37

把三组数排成

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

对它取 2×2 子式的 Plücker 关系。按第 1, 2 列、第 1, 3 列、第 2, 3 列展开 Laplace 恒等式, 正好得到

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0.$$

例 1.38

对列作交换, 把与主对角线相对的 b 移到主对角线附近。每次将一列移过 $n - 1$ 列, 共需交换 n 次, 因此符号因子为

$$(-1)^{n(n-1)} = 1.$$

矩阵化为 n 个二阶块

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

每个二阶块的行列式为 $a^2 - b^2$, 故

$$|A| = (a^2 - b^2)^n.$$

例 1.39

由于行列式对每一列都是可加的, 将 $|A + B|$ 逐列拆开。选择 k 列来自 B 、其余来自 A 的项, 除了 $k = 0$ 或 $k = n$ 外, 按所选的列指标和行指标作 Laplace 展开, 得到相应的 k 阶子式乘积。结果为

$$|A + B| = |A| + |B| + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} A \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix}.$$

例 1 (特征型行列式)

在行列式展开中:

- x^n 只能取全部对角元, 系数为 1;
- x^{n-k} 来自恰好保留 $n - k$ 个对角元、删去同一组 k 个行和列后所得的 k 阶子式。

故

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n,$$

其中

$$\alpha_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

例 1.36

与第六讲同一题一致, 结果为

$$|A| = (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left((n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i - 1 \right) \right).$$

练习 1

按题面所印, 矩阵只有 n 列却有 mn 行, 并不是方阵, 严格说 “ mn 阶行列式” 没有定义。若原意是 “每一行和每一列都各重复 m 次”, 则所得 mn 阶矩阵含有重复行; 当 $m \geq 2$ 时直接有两行相同, 故行列式为 0。

练习 2

这是第一讲例 1.3。按 Laplace 定理选取第一列和最后一行 (或连续作行消元) 可得

$$|A| = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right).$$

练习 3

题面矩阵为

$$\mathbf{1}\mathbf{1}^T + c\mathbf{y}\mathbf{y}^T.$$

当 $n \geq 3$ 时它至多由两个列向量生成, 故行列式为 0。当 $n = 2$ 时,

$$|A| = (c_1 - c_2)(y_1 - y_2).$$

原答案中的 $1 + \sum c_i y_i$ 不属于题面所印矩阵。

第十讲 综合运用

例 1.15

用求根法：行列式关于 a, b, c 是六次齐次多项式。当 $a + b + c = 0$ 时三行之和为某个公共向量，或由直接代换可检验行列式为零；当任意两项相等时也有类似因子。于是每对差都成为因子，剩余的多项式次数决定常数。取 $a = b = c = 1$ 可得常数为 2，故

$$|A| = 2abc(a + b + c)^3.$$

例 1.44

记

$$P_i = (x - a_i)^2 - a_i^2 = x^2 - 2a_i x, \quad a = (a_1, \dots, a_n)^T.$$

原矩阵可写成

$$\text{diag}(P_1, \dots, P_n) + aa^T.$$

把每项的 a_j^2 与原主对角项分开，再按列拆分并展开，

$$|A| = \prod_{i=1}^n P_i \sum_{i=1}^n a_i^2 \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} P_j.$$

例 1.34

同第六讲例 1.34。记 $W = (x_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ ，则

$$|A| = \det W (1 + \mathbf{1}^T W^{-1} \mathbf{1}).$$

例 1.45

把所给 $(n+1)$ 阶行列式按最后一列展开。最后一列的 $n+1$ 个元素均为 1，其代数余子式之和恰为左边行列式的值；再对前 n 列作

$$C_j \leftarrow C_j + C_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

可看出这些余子式正好就是原 n 阶矩阵各元素的代数余子式。因此

$$\boxed{\text{左边的行列式} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

例 1.42

条件 (1)–(4) 正是行列式作为 “列的 n 重线性、交错且规范化的函数” 的公理。

若 A 的列线性相关, 则可把一列写成其余列的线性组合。利用条件 (1)(2), $f(A)$ 分解为若干含两列相同的 f -值; 再由条件 (3) 有

$$f(\cdot, \dots, v, \dots, v, \dots) = -f(\cdot, \dots, v, \dots, v, \dots),$$

故这些项为 0。于是 $f(A) = 0 = |A|$ 。

若 A 的列线性无关, 则可用列消元把它化为单位矩阵。每一步列相加或数乘都按条件 (1)(2) 对应到 f , 与行列式的变换完全相同; 每作一次列交换按条件 (3) 改变一次符号。最后得到 $f(I_n) = |I_n| = 1$ 。因此

$$f(A) = |A|.$$

练习 1

记所给矩阵为 A 。其第一、二行分别为

$$3j - 2, \quad 4j - 3.$$

两者逐列之差为 $j - 1$, 不随列位置的偏移破坏 Vandermonde 结构。由第 4 讲例 1.32, $\det(A + t\mathbf{1}\mathbf{1}^T)$ 中 t 的系数恰为

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

另一方面, 对前两行作 $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ 后, $t\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ 的增量只保留在一个列差位置上, 整理可知

$$\det(A + t\mathbf{1}\mathbf{1}^T) = (1 + t) \det A.$$

比较 t 的系数, 得到

$$|A| = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$