

高等代数 第二章第四节

矩阵的运算 习题参考答案

依据习题册《第二章 向量空间与矩阵》第四节整理 · 2026 年 10 月

解法范围：只使用矩阵加法、数乘与乘法、转置、线性方程组的消元与自由未知量、列向量组的线性相关性以及矩阵的秩。本文不使用维数、基、秩-零化度关系、分块矩阵、线性映射、特征值或相似标准形。

记法与基本事实

设 $A \in M_{m,n}(K)$ 。用 $r(A)$ 表示矩阵的秩。本文反复使用的事实是：

齐次方程组 $AX = 0$ 经消元后有 $n - r(A)$ 个自由未知量。

这里没有引用秩-零化度公式，而是直接采用消元法的计数：在阶梯形矩阵中，未知量分为 $r(A)$ 个主变量和 $n - r(A)$ 个自由变量。另，矩阵 AB 的每一列都是 B 的列向量的线性组合；若 $AB = 0$ ，则 B 的每一列都是方程组 $AX = 0$ 的解。矩阵的秩等于其列向量组中极大线性无关部分组所含向量的个数。

习题四

第 1 题

(1) 逐项计算:

$$5 \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} & -10 & -\frac{9}{2} \\ 9 & -1 & 3 \\ -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} & \frac{21}{2} \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 三个乘积分别是

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 2+i \\ 0 & -1 \\ 2-i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \\ i \\ 2+2i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

最后一个乘积直接按矩阵乘法逐项计算:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 直接应用矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} & \lambda_1 a_{14} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_2 a_{24} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_3 a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13} & \lambda_4 a_{14} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23} & \lambda_4 a_{24} \\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33} & \lambda_4 a_{34} \end{pmatrix}.$$

第 2 题

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad (AB)' = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

由转置性质 $(AB)' = B'A'$, 以及 $(AB)' = (BA)'$,

$$A'B' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 记

$$S = a + b + c, \quad Q = a^2 + b^2 + c^2.$$

直接乘法得到

$$AB = \begin{pmatrix} S & Q & b^2 + 2ac \\ S & a^2 + b^2 + ac & Q \\ 3 & S & S \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} a + c + ac & b + ab + c & a^2 + 2c \\ a + b + bc & 2b + b^2 & ab + b + c \\ 2a + c^2 & a + b + bc & a + c + ac \end{pmatrix}.$$

于是

$$AB - BA = \begin{pmatrix} b - ac & a^2 + b^2 + c^2 - b - ab - c & b^2 + 2ac - a^2 - 2c \\ c - bc & a^2 + ac - 2b & a^2 + b^2 + c^2 - ab - b - c \\ 3 - 2a - c^2 & c - bc & b - ac \end{pmatrix}.$$

又

$$(AB)' = \begin{pmatrix} S & S & 3 \\ Q & a^2 + b^2 + ac & S \\ b^2 + 2ac & Q & S \end{pmatrix},$$

$$A'B' = (BA)' = \begin{pmatrix} a + c + ac & a + b + bc & 2a + c^2 \\ b + ab + c & 2b + b^2 & a + b + bc \\ a^2 + 2c & ab + b + c & a + c + ac \end{pmatrix}.$$

第 3 题

(1)

$$(2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}.$$

最后一步使用了如下恒等化形：把乘积的第 (i, j) 项与第 (j, i) 项合并。

(4)

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

第 4 题

矩阵 J 的元素为

$$J_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j + 1, \\ 0, & i \neq j + 1. \end{cases}$$

因此

$$(AJ)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} J_{kj} = \begin{cases} a_{i,j+1}, & j < n, \\ 0, & j = n, \end{cases}$$

即 AJ 删去第 1 列，其余各列左移一列，最后一列补零。

同理

$$(JA)_{ij} = \sum_{k=1}^n J_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{i-1,j}, & i > 1, \\ 0, & i = 1, \end{cases}$$

即 JA 删去最后一行，其余各行下移一行，第一行补零。

于是 $AJ = JA$ 当且仅当

$$a_{1,2} = \cdots = a_{1,n} = 0, \quad a_{i-1,j} = a_{i,j+1} \quad (1 < i \leq n, 1 \leq j < n).$$

第一组条件使主对角线上方各元全为零；第二组条件使每条与主对角线平行、位于主对角线及其下方的对角

线元素相等。因此, $AJ = JA$ 当且仅当 A 具有如下形式:

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix},$$

其中 $c_0, \dots, c_{n-1}$ 是任意常数。

第 5 题

只须比较矩阵元素。注意 $A+B$ 与 A, B 同型, 而 C 的列数可以与其相乘。

(1) 对任意 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s$,

$$((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}.$$

因此 $(A+B)C = AC + BC$ 。

(2) 对任意 i, j ,

$$\begin{aligned} (k(AC))_{ij} &= k \sum_{t=1}^n a_{it}c_{tj}, \\ ((kA)C)_{ij} &= \sum_{t=1}^n (ka_{it})c_{tj} = k \sum_{t=1}^n a_{it}c_{tj}, \\ (A(kC))_{ij} &= \sum_{t=1}^n a_{it}(kc_{tj}) = k \sum_{t=1}^n a_{it}c_{tj}. \end{aligned}$$

三式相等, 所以

$$k(AC) = (kA)C = A(kC).$$

第 6 题

由题中 J 的定义, $J_{ij} = 1$ 当且仅当 $j = i + 1$ 。按矩阵乘法逐项计算:

$$(JA)_{ij} = \sum_{t=1}^n J_{it}a_{tj} = \begin{cases} a_{i+1,j}, & i < n, \\ 0, & i = n. \end{cases}$$

由题中 A 的结构, $a_{rj} = 0$ 当 $j < r + k - 1$ 。于是 JA 的第 i 行等于 A 的第 $i + 1$ 行, 故其非零元从第 $i + k$ 列开始; 最后一行为零。即

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{3,k+2} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-k,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

其中未写出的位置均为 0。

第 7 题

记 B 的列向量为

$$\beta_1, \dots, \beta_s,$$

由 $AB = 0$, 有

$$A\beta_j = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

因此 B 的每一列都是齐次方程组 $AX = 0$ 的解。消去主变量后, 该方程组还剩

$$n - r(A)$$

个自由未知量; 每个解都由这些自由未知量的取值唯一确定。因此, 任何一组 $AX = 0$ 的解向量中, 至多只能有 $n - r(A)$ 个线性无关向量。所以

$$r(B) \leq n - r(A),$$

也就是

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

第 8 题

由 $AB = AC$ 得

$$A(B - C) = 0.$$

于是 $B - C$ 的每一列都是 $AX = 0$ 的解。因为 A 有 n 列且 $r(A) = n$, 消元后没有自由未知量, 所以齐次方程组 $AX = 0$ 只有零解。故

$$B - C = 0,$$

即 $B = C$ 。

第 9 题

先求使 A 非满秩的参数。按第一行展开有

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(3k - 1).$$

在通常的数域 (特征为 0) 中,

$$\det A = 0 \iff k = \frac{1}{3}.$$

当 $k = 1/3$ 时, 令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 方程 $Ax = 0$ 为

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \frac{1}{3}x_1 - x_3 = 0, \quad -x_1 + 3x_3 = 0.$$

第二、三式等价于 $x_1 = 3x_3$, 代入第一式得 $x_2 = -7x_3$ 。因此

$$\{x : Ax = 0\} = \{t(3, -7, 1)^T : t \in K\}.$$

可取

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad AB = 0.$$

第 10 题

矩阵的秩满足次可加性:

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

因为 $A + B$ 有 n 列, 所以

$$\text{齐次方程组 } (A + B)X = 0 \text{ 有非零解.}$$

取其中的非零向量 v , 并令 $C = (v, 0, \dots, 0)$ 为 $n \times s$ 矩阵。则 $C \neq 0$, 且

$$(A + B)C = 0.$$

第 11 题

由 $r(AB) \leq r(A)$ 。又 $AC = 0$ 且 $C \neq 0$, 说明 $AX = 0$ 有非零解, 故 $r(A) < n$ 。于是

$$r(AB) < n.$$

因而 $(AB)X = 0$ 存在非零解。取一个非零解 v , 令

$$D = (v, 0, \dots, 0),$$

即 D 的第一列为 v , 其余各列为零。显然 $D \neq 0$, 并且

$$ABD = 0.$$

第 12 题

分别记三个齐次方程组

$$AX = 0, \quad BX = 0, \quad (AB)X = 0$$

的解集为 U, V, W 。经消元后, 它们分别有

$$p = n - r(A), \quad q = n - r(B), \quad s = n - r(AB).$$

因此任意一组彼此线性无关的解向量, 至多分别有 p, q, s 个。由交换性 $AB = BA$:

- 若 $x \in U$, 则 $ABx = BAx = 0$, 所以 $U \subset W$;
- 若 $x \in V$, 则 $ABx = A0 = 0$, 所以 $V \subset W$ 。

矩阵 C 的解集恰为 $U \cap V$ 。记它消元后的自由未知量个数为 t , 即 $t = n - r(C)$ 。

现在取 $U \cap V$ 的 t 个线性无关解向量 $\gamma_1, \dots, \gamma_t$, 其中再补入任一个新的解都会破坏线性无关性。再分别补成 U 和 V 中含向量数最多且线性无关的解向量组:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_t, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-t}$$

$$\gamma_1, \dots, \gamma_t, \beta_1, \dots, \beta_{q-t}.$$

把 U 与 V 的这些解向量合在一起, 去掉重复的 γ_j 后, 至多有

$$p + q - t$$

个线性无关向量。又这些向量全属于 W , 而 W 中任意一组线性无关解向量至多含 s 个向量, 所以

$$p + q - t \leq s.$$

因此

$$t \geq p + q - s.$$

代入 p, q, s, t , 得到

$$n - r(C) \geq 2n - r(A) - r(B) - (n - r(AB)),$$

化简即

$$r(A) + r(B) \geq r(C) + r(AB).$$

第 13 题

构造一个 $s \times n$ 矩阵 H , 以 $\eta_1^T, \dots, \eta_s^T$ 为各行:

$$H = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \vdots \\ \eta_s^T \end{pmatrix}.$$

因 $\eta_1, \dots, \eta_s$ 线性无关, $r(H) = s$ 。因此齐次线性方程组

$$HZ = 0$$

消元后恰有 $n - s$ 个自由未知量。取这些自由未知量依次取单位值时得到的 $n - s$ 个解, 记为 $w_1, \dots, w_{n-s}$; 它们线性无关。

令 L 以 $w_1^T, \dots, w_{n-s}^T$ 为各行。因为这 $n - s$ 个向量线性无关,

$$r(L) = n - s.$$

又 w_j 满足 $Hw_j = 0$, 即

$$\eta_i^T w_j = 0,$$

所以

$$L\eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

齐次方程组 $LX = 0$ 消元后有

$$n - r(L) = s$$

个自由未知量。线性无关的 $\eta_1, \dots, \eta_s$ 全是它的解；若还有一个解不能由它们线性表示，就会得到 $s+1$ 个线性无关解，矛盾。因此 $LX = 0$ 的任意解都是 $\eta_1, \dots, \eta_s$ 的线性组合。

第 14 题

置

$$\delta_i = \gamma_i - \gamma_0, \quad i = 1, \dots, s.$$

由 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ 线性无关可知

$$\delta_1, \dots, \delta_s$$

也线性无关。以 $\delta_1^T, \dots, \delta_s^T$ 为各行构造 $s \times n$ 矩阵 H 。由于 $r(H) = s$ ，齐次方程组 $HZ = 0$ 消元后有 $n-s$ 个自由未知量；取对应的 $n-s$ 个线性无关解 $w_1, \dots, w_{n-s}$ ，并以它们为行构造矩阵 L 。则 $r(L) = n-s$ ，且

$$L\delta_i = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

而 $\delta_1, \dots, \delta_s$ 是 $LY = 0$ 的 s 个线性无关解，且该方程组消元后也只有 s 个自由未知量，所以

$$LY = 0 \iff Y = c_1\delta_1 + \dots + c_s\delta_s.$$

再置

$$b = L\gamma_0.$$

考察非齐次线性方程组

$$LX = b.$$

首先，

$$L\gamma_0 = b, \quad L\gamma_i = L\gamma_0 + L\delta_i = b.$$

所以 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ 都是解。

其次, 若 X 是该方程组的任一解, 则

$$L(X - \gamma_0) = 0,$$

于是存在 $c_1, \dots, c_s \in K$, 使得

$$X - \gamma_0 = c_1(\gamma_1 - \gamma_0) + \dots + c_s(\gamma_s - \gamma_0).$$

因此 X 可被 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ 线性表示, 所得非齐次方程组满足题设两条要求。

第 15 题

记

$$k = s - r(B), \quad l = s - r(AB).$$

题设中 $\eta_1, \dots, \eta_k$ 是 $BX = 0$ 的 k 个线性无关解, 且该方程组恰有 k 个自由未知量; 而

$$\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}, \dots, \eta_l$$

是 $(AB)X = 0$ 的 l 个线性无关解, 且该方程组恰有 l 个自由未知量。

先证明向量组

$$B\eta_{k+1}, \dots, B\eta_l$$

线性无关。若

$$\sum_{i=k+1}^l c_i B\eta_i = 0,$$

令 $v = \sum_{i=k+1}^l c_i \eta_i$, 则 $Bv = 0$ 。如果 $v \neq 0$, 它便是 $BX = 0$ 的非零解; 而 $BX = 0$ 的任意解都可由 $\eta_1, \dots, \eta_k$ 线性表示, 所以

$$v = \sum_{i=1}^k d_i \eta_i.$$

这与 $\eta_1, \dots, \eta_l$ 线性无关矛盾。因此 $v = 0$, 所有 $c_i = 0$ 。所以 $B\eta_{k+1}, \dots, B\eta_l$ 线性无关。

再说明这个向量组恰好张成了所有形如 Bv 且满足 $A(Bv) = 0$ 的向量。若 v 是 $(AB)X = 0$ 的任一解, 则

$$v = c_1 \eta_1 + \dots + c_l \eta_l.$$

前 k 个满足 $B\eta_i = 0$, 故

$$Bv = \sum_{i=k+1}^l c_i B\eta_i.$$

因此

$$\begin{aligned} r(B\eta_{k+1}, \dots, B\eta_l) &= (s - r(AB)) - (s - r(B)) \\ &= r(B) - r(AB). \end{aligned}$$

现在利用这一结果证明命题 4.6:

$$\boxed{r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.}$$

上面表明, 在所有“既属于 B 的列空间、又满足 $AY = 0$ ”的向量中, 极大线性无关部分组恰有 $r(B) - r(AB)$ 个向量。但这些向量都是 $AY = 0$ 的解, 而 $AY = 0$ 消元后只有 $n - r(A)$ 个自由未知量, 故

$$r(B) - r(AB) \leq n - r(A).$$

移项即得

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

第 16 题

因为 $r(A) = n$, 齐次方程组 $AX = 0$ 只有零解。于是对任意系数 $c_1, \dots, c_s$,

$$\sum_{j=1}^s c_j A\beta_j = 0 \iff A \left(\sum_{j=1}^s c_j \beta_j \right) = 0 \iff \sum_{j=1}^s c_j \beta_j = 0.$$

因此 $A\beta_{j_1}, \dots, A\beta_{j_s}$ 的任意线性关系都与 $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s}$ 的同一线性关系一一对应。

因此, 若 $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ 是 B 的列向量组

$$\beta_1, \dots, \beta_s$$

的一个极大线性无关部分组, 则

$$\gamma_{i_1} = A\beta_{i_1}, \quad \dots, \quad \gamma_{i_r} = A\beta_{i_r}$$

线性无关; 而 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 中任意一列 $\gamma_j = A\beta_j$ 都可由这些 γ_{i_ℓ} 线性表示。

故 $C = AB$ 的列向量组

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$$

的一个极大线性无关部分组可取为

$$\boxed{\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}.}$$