

高等代数典型问题与方法

第三章

线性方程组

例题练习题目集

樊启斌

A4 黑白 按原解答长度分页

例 3.1 (数学—①, 2014 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ().

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

例 3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ().

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

例 3.3 (清华大学,2006 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组线性无关的向量. 问 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_1$ 是否线性无关? 请证明之

例 3.4 (华东师范大学,2001 年) 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$. 试证:

- (1) 当 n 为偶数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关;
- (2) 当 n 为奇数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

例 3.5 (哈尔滨工业大学,2006 年) 设向量 $\beta_1 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$
 $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4$. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关的充分
必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

例 3.6 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m (\beta \neq 0)$ 线性相关, 证明:
 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有且仅有一个向量 $\alpha_i (1 \leq i \leq m)$ 可由其前面的向量线性表示.

例 3.7 (北京大学, 2010 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 并且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示. 证明: 必存在某个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, t)$ 使得向量组 $\beta_j, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

例 3.8 (武汉大学, 2006 年) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 是 $n \times r$ 矩阵, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ 是 $n \times s$ 矩阵, $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$. 证明: 若 $r + s > n$, 则必存在非零向量 ξ , 使得 ξ 既可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 又可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示.

例 3.9 (天津大学,2004 年) 设 $A_{n \times m} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $B_{n \times m} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件是 ().

- (A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示
- (B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
- (C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价
- (D) 矩阵 A 与矩阵 B 等价

例 3.10 已知 n 维向量组

$$(I) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \quad (II) : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t,$$

且 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$, 则 ().

- (A) 当 $s = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
- (B) 当 $s = t = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
- (C) 当 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
- (D) 当 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = 2r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

例 3.11 (重庆大学,2006 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 证明: 对于任意常数 l , 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, l\beta_1 + \beta_2$ 总线性无关.

例 3.12 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量 ($s>1$), 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$. 证明: 向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例 3.13 (数学三,1999 年) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则 ()

- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示
- (B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示
- (C) α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示
- (D) α_m 可由 (I) 线性表示, 但不可由 (II) 线性表示

例 3.14 (南开大学,2012 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性相关. 证明 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性表示.

例 3.15 (武汉大学,2014 年) 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 表示为

$$\beta_i = \alpha_i + t_i \alpha_{s+1} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (①)$$

已知向量 $\alpha_{s+1} \neq \mathbf{0}$ 试证明: 如果对任意一组实数 $t_1, t_2, \dots, t_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 必线性无关.

例 3.16 (哈尔滨工业大学, 2005 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量, $\beta_i = \sum_{j=1}^r k_{ij} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, r$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关的充分必要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rr} \end{pmatrix}$$

不可逆.

例 3.17 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 的一个基, $\alpha_{n+1} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 全不为零. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中的任意 n 个向量都构成 K^n 的一个基.

例 3.18 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 中的向量组, 试证明下述命题相互等价:

- (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;
- (2) K^n 中的任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- (3) K^n 中的自然基向量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

例 3.19 已知向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 设各向量组的秩分别为 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II) = 3, \text{rank}(III) = 4$. 证明: 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4\}$ 的秩为 4.

例 3.20 (数学二,2000 年) 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a,b 的值.

例 3.21 设 $b \neq 0$, 讨论向量组

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \\ \alpha_2 &= (b, 1, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \\ \alpha_3 &= (b^2, b, 1, a_{33}, \cdots, a_{3n}), \\ &\cdots \\ \alpha_{n+1} &= (b^n, b^{n-1}, b^{n-2}, \cdots, 1).\end{aligned}$$

的线性相关性

例 3.22 (东南大学, 2005 年) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关. 问: 当参数 t_1, t_2 满足什么条件时, 向量组 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \cdots, \beta_{s-1} = t_1\alpha_{s-1} + t_2\alpha_s$ 是线性无关的?

例 3.23 (北京航空航天大学, 2004 年) 设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}, \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ 的秩分别为 s_1, s_2, s_3 , 其中 $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i, i = 1, 2, \dots, m$. 证明: $s_1 \leq s_2 + s_3, s_2 \leq s_1 + s_3, s_3 \leq s_1 + s_2$

例 3.24 (武汉大学, 2011 年) 已知 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关. 证明:

(1) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 则系数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 或者全为零, 或者全不为零;

(2) 若 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 且 $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 其中 $b_1 \neq 0$, 则

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m}$$

例 3.25 (南京航空航天大学, 2016 年) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}; \quad (II): \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 线性相关;

(2) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 不能由向量组 (II) 线性表示;

(3) 在题 (1) 和 (2) 同时成立的情况下, 将向量 $\gamma = (1, -2, -5)^T$ 用 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 线性表示.

例 3.26 (华中科技大学,2005 年) 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3, \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3, \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3, \end{cases}$$

其中 a, b, c 是互不相等的常数.

例 3.27 (浙江大学, 2010 年) 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明 $f(x)$ 的系数都是有理数. 举例说明存在不是整系数的多项式满足对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数.

例 3.28 (武汉大学, 1994 年) 试利用线性方程组理论证明: 一元 n 次多项式不能有多于 n 个互异的根

例 3.29 (南开大学,2010 年) 证明: 如果一个球面的球心 (x_0, y_0, z_0) 至少有一个坐标是无理数, 那么该球面上任意不在同一平面的四点中至多三个点的坐标都是有理数

例 3.30 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解
- (B) 当 $n > m$ 时必有非零解 (C) 当 $m > n$ 时仅有零解
- (D) 当 $m > n$ 时必有非零解

例 3.31 (数学一,2003 年) 设有齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 和 $Bx = \mathbf{0}$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

- ① 若 $Ax = \mathbf{0}$ 的解均是 $Bx = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\text{rank} A \geq \text{rank} B$
- ② 若 $\text{rank} A \geq \text{rank} B$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 的解均是 $Bx = \mathbf{0}$ 的解;
- ③ 若 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 同解, 则 $\text{rank} A = \text{rank} B$
- ④ 若 $\text{rank} A = \text{rank} B$, 则 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 同解.

以上命题中正确的是 ().

(A) ① ②

(B) ① ③

(C) ② ④

(D) ③ ④

例 3.32 求 λ 的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 0, \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出其一般解

例 3.33 (南开大学,2005 年) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ -x_1 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ax_1 + cx_2 - ex_4 = 0, \\ bx_1 + dx_2 - ex_3 = 0 \end{cases}$$

的一般解以 x_3, x_4 为自由未知量.

- (1) 求 a, b, c, d, e 满足的条件;
- (2) 求齐次线性方程组的基础解系.

例 3.34 (中国科学院,2005 年) 设四元齐次线性方程组 (I) 为
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$
 又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1)$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解, 若没有, 则说明理由.

例 3.35 (西安电子科技大学, 2005 年) 设四元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 问当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解

例 3.36 (华南理工大学,2015 年) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad (II) : \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

例 3.37 (电子科技大学,2010 年) 已知齐次线性方程组

(I)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ ax_1 + a^2x_3 = 0, \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解满足方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 (I) 的通解.

例 3.38 (上海师范大学,2005 年) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2).$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解? 并求出其通解

【分析】 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组, 可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为行阶梯形矩阵, 再讨论其秩是否小于 n , 进而判断是否有非零解; 也可直接计算系数矩阵的行列式, 根据题设条件行列式的值必为零, 由此对参数 a 的可能取值进行讨论. 这里只给出第一种解法

例 3.39 (厦门大学,2011 年; 数学三,2002 年) 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$ 试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解、有无穷多个解? 在有无穷多个解时, 求出一般解, 并用基础解系表示一般解.

例 3.40 (北京交通大学,2005 年) 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

的一个基础解系为

$$(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2,2n})^T, \dots, (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{n,2n})^T.$$

求线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

的通解，并说明理由

例 3.41 (浙江大学,2003 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 s 个线性无关的向量. 证明: 存在含 n 个未知量的齐次线性方程组, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是它的一个基础解系.

例 3.42 (东南大学,2004 年; 华南理工大学,2014 年) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 试讨论 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 b 满足何种条件时,

- (1) 方程组仅有零解;
- (2) 方程组有非零解. 此时, 用基础解系表出所有解.

例 3.43 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $\text{rank}A + \text{rank}B < n$, 证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解.

例 3.44 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 m 阶可逆矩阵, 证明: 若 A^T 的列向量组是齐次线性方程组 $Cx = 0$ 的一个基础解系, 则 $(BA)^T$ 的列向量组也是 $Cx = 0$ 的一个基础解系.

例 3.45 (华中师范大学, 2000 年; 厦门大学, 2010 年) 设 $A \in P^{m \times n}$, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, $B = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r})$. 证明: 如果 $AC = O$ (其中 $C \in P^{n \times t}$), 那么存在唯一的矩阵 D , 使 $C = BD$

例 3.46 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系 $s, t \in \mathbb{R}$. 又设

$$\beta_1 = s\alpha_1 + t\alpha_2, \dots, \beta_{k-1} = s\alpha_{k-1} + t\alpha_k, \beta_k = s\alpha_k + t\alpha_1.$$

试问: s, t 满足什么关系时, 使得 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系; 反之, 当 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系时, 这个关系必须成立.

例 3.47 (湖南大学,2011 年) 设 A, B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times m$ 矩阵, C 为 n 阶可逆矩阵, 且 $\text{rank } A = r < n$, $A(C + BA) = O$. 证明:

(1) $\text{rank}(C + BA) = n - r$;

(2) 线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $x = (C + BA)z$, 其中 z 为任意的 n 维列向量

例 3.48 (北京大学,2007 年) 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 A 与 B 的列向量组是否等价? 行向量组是否等价? 若是, 则给出证明; 若否, 则举出反例.

例 3.49 (中国科学院,2006 年; 山东大学,2015 年) 设有 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0, \end{cases}$$

其系数矩阵 A 划去第 j 列后的 $n-1$ 阶子式记为 $M_j (j = 1, 2, \dots, n)$. 试证明:

- (1) $(M_1, -M_2, \dots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;
- (2) 如果 $\text{rank } A = n - 1$, 那么方程组的解均为 $(M_1, -M_2, \dots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

例 3.50 设 A, B 都是数域 F 上的 $(n-1) \times n$ 矩阵, 且都是行满秩的. 对 $i = 1, 2, \dots, n$ 用 a_i 表示 A 中划去第 i 列所得的 $n-1$ 阶子式, b_i 表示 B 中划去第 i 列所得的 $n-1$ 阶子式. 又设齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 同解, 求证: n 维向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的对应分量成比例.

例 3.51 (南开大学,2004 年) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

的行向量组是线性方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解. 令 M_i 表示 A 中划掉第 i 列的 $n-1$ 阶行列式 ($i = 1, 2, \cdots, n$)

- (1) 证明: $\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 0 \Leftrightarrow A$ 的行向量组不是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的基础解系;
- (2) 令 $\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 1$, 求 M_i

例 3.52 (北京大学,1997 年; 武汉大学,2009 年; 华南理工大学,2011 年) 设 A, B 是数域 P 上的 n 阶方阵, X 是未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 所构成的 $n \times 1$ 矩阵. 已知齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量, 这里 $l \geq 0, m \geq 0$ 证明:

(1) $(A+B)X = \mathbf{0}$ 至少有 $\max(l, m)$ 个线性无关的解向量;

(2) 如果 $l+m > n$, 那么 $(A+B)X = \mathbf{0}$ 必有非零解;

(3) 如果 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 无公共的非零解向量, 且 $l+m = n$, 那么 P^n 中任一向量 α 都可唯一地表示成 $\alpha = \beta + \gamma$, 这里 β, γ 分别是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的解向量.

例 3.53 (北京大学,2005 年) 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的 (i, j) 元为 $a_i - b_j$

(1) 求 $|A|$

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$, 求齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的维数和一个基

例 3.54 (中国科学技术大学,2010 年) 求如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

例 3.55 (武汉大学,2013 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + tz = -1, \\ 7x - 2z = -1 \end{cases}$$

的 3 个互异的解向量

(1) 试求参数 t 的值;

(2) 证明: $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关.

例 3.56 (数学一, 2009 年) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- (1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3
- (2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

例 3.57 (北京师范大学,2006 年) 当 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 1, \\ ax_1 + (2b+1)x_2 + 3x_3 = 1, \\ ax_1 + (b+1)x_2 + (b+4)x_3 = 2b+1. \end{cases}$$

有解? 并求解.

例 3.58 (武汉大学,2011 年; 数学一,2008 年) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & a^2 & 2a & \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 i

(III) 当 α 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

例 3.59 (西南大学,2007 年) 问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \lambda^3 \end{cases}$$

没有解? 有唯一解? 有无穷多解?

例 3.60 (南京大学,2016 年; 南京理工大学,2009 年) 讨论当 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解

例 3.61 (北京邮电大学,2007 年; 北京科技大学,2010 年) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 19 并写出线性表示式

例 3.62 (南开大学,2012 年) 试求出线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases}$$

存在解的充分必要条件, 并在有解时求出其通解, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为参数.

例 3.63 (上海交通大学,2005 年) 下面的 n 元线性方程组何时无解, 有唯一解, 有无穷多组解? 有解时, 求出解.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

例 3.64 (华东师范大学,2005 年) 讨论 $b_1, b_2, \dots, b_n (n \geq 2)$ 满足什么条件时下列方程组有解, 并求解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1, \\ x_2 + x_3 = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1}, \\ x_n + x_1 = b_n. \end{cases}$$

例 3.65 (南京大学,2011 年) 设 n 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关, 后 $n-1$ 个列向量线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

(1) 证明: 方程组 $AX = \beta$ 必有无穷多解;

(2) 求方程组 $AX = \beta$ 的通解.

例 3.66 (南京理工大学, 2003 年) 设 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in P^{n \times n}$, 线性方程组 $AX = b$ 有通解 $X = \eta_0 + k_1 \xi_1 + \dots + k_s \xi_s$, 其中 $\eta_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$, $\xi_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i \uparrow}, 0, \dots, 0)^T, i = 1, 2, \dots, s$. 又设 $B = (nA_n, (n-1)A_{n-1}, \dots, 2A_2, A_1)$, 求 $BX = b$ 的通解.

例 3.67 设 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 已知非齐次线性方程组 $Ax = \alpha_5$ 的通解为 $k(2, 0, -3, 1)^T + (1, 2, -1, 0)^T$

其中 $k \in \mathbb{R}$. 试问: (1) α_2 可否由 $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性表示? (2) α_2 可否由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示? 若可以表示, 则写出一般表示式; 若不能表示, 则说明理由.

例 3.68 (华南理工大学, 2000 年) 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (\text{I})$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩. 证明方程组 (I) 有解. 问逆命题是否成立? 为什么?

例 3.69 (武汉大学,2005 年) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 是 m 维列向量, 证明下述命题相互等价:

(1) 线性方程组 $Ax = \beta$ 有解;

(2) 齐次方程组 $A^T x = \mathbf{0}$ 的任一解 $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 必满足 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_m b_m = 0$

(3) 线性方程组 $(A^T) x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解, 其中 $\mathbf{0}$ 是 n 维零向量

例 3.70 (北京师范大学, 1998 年) 证明: 含有 n 个未知量 $n+1$ 个方程的线性方程组

[illegible]

有解的必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix} = 0. \quad (\textcircled{1})$$

这个条件充分吗？若这个条件充分，则给出一个证明；若你认为不是充分条件，请举出反例

例 3.71 (北京大学,2001 年) 设 ω 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的本原 n 次单位根 (即 $\omega^n = 1$, 而当 $0 < t < n$ 时, $\omega^t \neq 1$), s, b 都是正整数, 且 $s < n$. 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^b & \omega^{2b} & \cdots & \omega^{(n-1)b} \\ 1 & \omega^{b+1} & \omega^{2(b+1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{b+s-1} & \omega^{2(b+s-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+s-1)} \end{pmatrix},$$

任取 $\beta \in \mathbb{C}^s$, 判断线性方程组 $AX = \beta$ 有无解? 有多少解? 写出理由.

例 3.72 (北京理工大学,2003 年) 设复数 ω 满足 $\omega^n = 1$, 但对 $0 < k < n, \omega^k \neq 1$ 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^t & \omega^{2t} & \cdots & \omega^{(n-1)t} \\ 1 & \omega^{t+1} & \omega^{2(t+1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(t+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{t+s-1} & \omega^{2(t+s-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(t+s-1)} \end{pmatrix},$$

这里 s, t 都是正整数, 且 $s < n$. 任取 $s \times 1$ 复矩阵 b 和 $n \times 1$ 复矩阵 c , 分别讨论线性方程组 $AX = b$ 和 $A^T Y = c$ 的解的情况

例 3.73 (北京大学,1991 年) 已知 $D = |a_{ij}|_{n \times n} \neq 0$. 试证明: 线性方程组

(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = d. \end{cases}$$

与

(II)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = c_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d. \end{cases}$$

或都有唯一解, 或都没有解

例 3.74 (重庆大学,2005 年) 设 A 为 n 阶方阵 $A^* = (A_{ij})$ 为 A 的伴随矩阵且 $A_{11} \neq 0$ 又设 $b \neq 0$ 为 n 维列向量. 证明: $AX = b$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow b$ 是 $A^*X = 0$ 的解.

例 3.75 (四川大学,2000 年) 设 A 是一个 n 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 且存在 n 维非零列向量 α 满足 $A\alpha = 0$ 证明: 非齐次线性方程组 $A^*X = \alpha$ 有解 $\Leftrightarrow \text{rank}A = n - 1$

例 3.76 (华东师范大学,2005 年) 设 γ_0 是数域 K 上非齐次线性方程组 $AX = B$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是该方程组的导出组的基础解系, 则以下命题中错误的是 ().

(A) $\gamma_0, \gamma_0 - \eta_1, \gamma_0 - \eta_2, \dots, \gamma_0 - \eta_s$ 是 $AX=B$ 的一组线性无关解向量;

(B) $AX = B$ 的每个解均可表为 $\gamma_0, \eta_1, 2\eta_2, \dots, s\eta_s$ 的线性组合;

(C) $2\gamma_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_l$ 是 $AX = B$ 的解;

(D) $AX = B$ 的每个解均可表为 $\gamma_0, \gamma_0 + \eta_1, \gamma_0 + \eta_2, \dots, \gamma_0 + \eta_s$ 的线性组合.

例 3.77 (上海大学,2005 年) 设 β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系. 求证:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \beta$ 线性无关;
- (2) $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_{n-r}, \beta$ 也线性无关.

例 3.78 (武汉大学, 2015 年) 设 A 为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵, b 为 F^m 中的非零列向量, $\text{rank } A = \text{rank}(A, b) = r < n$. 又设 S 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合. 证明:

(1) S 中必存在 $n-r+1$ 个线性无关的向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$;

(2) $\beta \in S$ 的充分必要条件是存在 $k_i \in F (1 \leq i \leq n-r+1)$, $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i = 1$, 使得 $\beta = \sum_{i=1}^{n-r+1} k_i \eta_i$

例 3.79 (厦门大学, 2003 年) 设 A 是数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵, b 是 F 上的 m 维非零列向量, η 是线性方程组 $AX = b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 求证: $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_s$ 是 $AX = b$ 的全体解集合的一个极大线性无关组.

例 3.80 (南京航空航天大学,2016 年) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解

- (1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩为 2;
- (2) 求 a, b 的值;
- (3) 求方程组在超平面 $x_3 - x_4 = 0$ 上的模 (长度) 最小的特解

例 3.81 (南开大学, 2009 年) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为数域 P 上的 n 阶方阵, 满足条件 $b_{ij} = b^{i-j} a_{ij}$, 其中 b 为一非零常数. 作线性方程组 (I): $AX=C$ 及 (II): $BX = D$. 试证明方程组 (I) 对任何 $C \in P^{n \times 1}$ 有解当且仅当方程组 (II) 对任何 $D \in P^{n \times 1}$ 有解.

例 3.82 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$), 则 3 条直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

相交于一点的充分必要条件是 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
 (C) $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2)$ (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关

例 3.83 (南京理工大学,2010 年; 重庆大学,2006 年) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

证明这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$

例 3.84 设直线 L_1 与 L_2 的一般方程为

$$\begin{aligned} L_1 : & \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \\ L_2 : & \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (①)$$

②

请给出并证明 L_1 与 L_2 平行 (但不重合) 的充分必要条件

例 3.85 (大连理工大学,2007 年; 重庆大学,2004 年) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为实数域上的矩阵, 证明:

(1) 如果 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $\det A \neq 0$.

(2) 如果 $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $\det A > 0$.

例 3.86 (汕头大学,2004 年) 设 A_1 为 $1 \times n$ 矩阵 $A_1 \neq O$ 如 $A_1 x = 0$ 有非零解, 取其中一个 α_1 , 令 $A_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1^T \end{pmatrix}$, 其中 α_1^T 表示 α_1 的转置. 如 $A_2 x = 0$ 有非零解, 再取其中一个 α_2 , 令 $A_3 = \begin{pmatrix} A_2 \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}$, 如此得 $A_1, A_2, \dots$, 直到 $A_r x = 0$ 只有零解为止. 问是否存在 A_1 , 使得 $A_1, A_2, \dots$ 为无穷序列? 为什么? 若序列有限, 可否确定 r 的上界? (若能确定, 则给出上界.)

例 3.87 (浙江大学,2001 年) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, b 是 $m \times 1$ 矩阵

(1) 证明: $\text{rank}(A^T A) = \text{rank} A$; (苏州大学,2012 年)

(2) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 证明: 线性方程组 $A^T A x = A^T b$ 有解. (华东师范大学,2014 年)

例 3.88 设 $f \in C^1[x_0, x_2]$, $x_0 < x_1 < x_2$, 问是否存在次数不超过 2 的多项式 $P(x)$, 满足

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_1) = f'(x_1), \quad P(x_2) = f(x_2)?$$

若存在, 则求出所有的 $P(x)$; 若不存在, 则给出一个反例

例 3.89 (四川大学,2006 年) 设线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是数域 F 上的矩阵 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 对于某个 $k(1 \leq k \leq n)$, 证明: 该方程组的任意解的第 k 个分量都为 0 的充分必要条件是, 划去增广矩阵 (A, β) 的第 k 列后秩要减少 1.

例 3.90 (华东师范大学,2008 年; 南昌大学,2013 年) 设 A 是数域 K 上的一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 m 维非零列向量. 令

$$W = \{\alpha \in K^n \mid \text{存在 } t \in K, \text{ 使得 } A\alpha = tB\}$$

(1) 证明: W 关于 K^n 的运算构成 K^n 的一个子空间;

(2) 设线性方程组 $AX=B$ 的增广矩阵的秩为 r , 证明 W 的维数 $\dim W = n - r + 1$

(3) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

求 W 的一个基.

例 3.91 (华东理工大学,2001 年) (1) 证明: 若 n 阶方阵 $T = (t_{ij})$ 主对角线上的元 t_{ii} 均不为零, 则存在向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 使 TY 的每个分量都不为零;

(2) 若线性方程组 $Ax = 0$ 的一个解 x_0 的各个分量都不为零, 则称 x_0 为 $Ax = 0$ 的一个强非零解. 试证: $Ax = 0$ 有强非零解的充分必要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

例 3.92 把函数 $\frac{x}{\ln(1+x)}$ 展开成幂级数时得到

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + \cdots.$$

证明: 展开式的系数 $\{h_n\}$ 可以用行列式表示为

$$h_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \Delta.$$

例 3.93 (南开大学, 2006 年) 设 A 是 n 阶方阵, 将 A 作分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_4 分别为 k 阶和 $n-k$ 阶方阵 ($1 \leq k < n$), 已知 A_4 为可逆矩阵. 又设 $B = (b_1, b_1, \dots, b_n)^T$ 为一个列矩阵, 作线性方程组 $AX=B$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为未知数. 证明:

(1) 若 $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ 可逆, 则线性方程组有唯一解;

(2) 设 $B_1 = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T, B_2 = (b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)^T, B_3 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$. 若 $\text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_3) = \text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) < k$, 则线性方程组有无穷多个解; 若 $\text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_3) > \text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)$, 则线性方程组无解.

例 3.94 (北京师范大学, 1991 年) 设有数域 F 上的两个线性方程组

(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

与

(II)

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = c_s. \end{cases}$$

若 (I) 有解, 则 (II) 与 (I) 同解 $\iff F^{n+1}$ 中的两个向量组

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1), & \beta_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}, c_1), \\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, b_2), & \beta_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}, c_2), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}, b_m) & \beta_s = (b_{s1}, b_{s2}, \cdots, b_m, c_s) \end{array} \quad \text{与} \quad \text{等价}.$$

例 3.95 (RMC 试题,2004 年) 设 a, b, c, d 是相差 1 的正整数, x, y, z, t 是实数, 满足 $a^x = bcd, b^y = cda, c^z = dab, d^t = abc$. 证明: 行列式

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = 0.$$

例 3.96 (北京大学,2019 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的列向量组, 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 $\mathbb{R}^t$ 中线性无关的列向量组. 证明: 若存在实数 $c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, t$, 使得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t c_{ij} \alpha_i \beta_j^T = O,$$

则系数 c_{ij} 全为零.

例 3.97 (华东师范大学,2003 年) 设 $f(x), g(x)$ 为数域 K 上互素的多项式, C 为 K 上的 n 阶方阵 $A = f(C), B = g(C)$. 证明: 方程 $ABX = O$ 的每一个解 X 均可唯一地表为 $X = Y + Z$ 的形式, 其中 Y, Z 分别为方程 $BY = O$ 与 $AZ = O$ 的解.

例 3.98 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是双曲线 $xy=1$ 上互异的 4 点的横坐标, 证明: 若这 4 点共圆, 则 $x_1x_2x_3x_4 = 1$

例 3.99 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, W_A 与 W_B 分别是齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 与 $Bx = \mathbf{0}$ 的解空间, 则 $W_A \subseteq W_B$ 的充分必要条件是存在 $s \times m$ 矩阵 P 使得 $PA=B$.

例 3.100 (北京大学, 2010 年) 设 A, B 是 n 阶实方阵, 满足 $A = (B - \frac{1}{110}E)^T(B + \frac{1}{110}E)$. 证明: 对任意的 n 维列向量 ξ , 线性方程组 $A^T(A^2 + A)X = A^T\xi$ 必有解.

例 3.101 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $n(n \geq 4)$ 个互不相同的实数. 求出下面具有 n 个未知元 $n-2$ 个方程的线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1^{n-3} x_1 + a_2^{n-3} x_2 + \cdots + a_n^{n-3} x_n = 0. \end{cases} \quad (①)$$