

第二章 向量空间与矩阵

第四节 矩阵的运算

习题四

1. 进行下列矩阵运算：

(1)

$$5 \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 2+i \\ 0 & -1 \\ 2-i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

2. 设

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix}.$$

计算 AB , $AB - BA$, $(AB)'$, $A'B'$.

3. 计算:

(1)

$$(2 \quad 3 \quad -1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} (2 \quad 3 \quad -1);$$

(3)

$$(x \quad y \quad 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix};$$

(4)

$$(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

4. 给定数域 K 上两个 $n \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

试计算 AJ 及 JA , 并判断在什么情况下 $AJ = JA$.

5. 设 $A, B \in M_{m,n}(K)$, $C \in M_{n,s}(K)$, k 为数域 K 上一个数. 证明:

(1) $(A + B)C = AC + BC$;

(2) $k(AC) = (kA)C = A(kC)$.

6. 给定数域 K 上两个 $n \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & & a_{n-k+1,n} \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

试计算 JA .

7. 设 $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,s}(K)$. 如果 $AB = 0$, 证明

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

8. 设 $A \in M_{m,n}(K)$ 且 $r(A) = n$. 又设 B, C 为数域 K 上 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = AC$. 证明 $B = C$.

9. 给定数域 K 上的 3×3 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

问 k 取 K 内何值时, 可找到数域 K 上的 3×3 矩阵 B , $B \neq 0$, 且 $AB = 0$, 并具体求出一个这样的 3×3 矩阵 B .

10. 设 A, B 是数域 K 上的两个 $m \times n$ 矩阵. 如果 $r(A) < \frac{n}{2}$, $r(B) < \frac{n}{2}$. 证明存在 K 上 $n \times s$ 矩阵 C , $C \neq 0$, 使 $(A + B)C = 0$.

11. 设 A, B 是数域 K 上两个 $n \times n$ 矩阵. 已知存在 K 上非零的 $n \times n$ 矩阵 C , 使 $AC = 0$. 证明存在 K 上非零的 $n \times n$ 矩阵 D , 使 $ABD = 0$.

12. 设 A, B 是数域 K 上两个 $n \times n$ 矩阵且 $AB = BA$. 又设 C 是将 A, B 的行向量依次排列所得的 $2n \times n$ 矩阵, 即

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

证明

$$r(A) + r(B) \geq r(C) + r(AB).$$

(注: 上式中的 AB 表示 A 与 B 的乘积.)

13. 给定数域 K 上 n 维向量空间 K^n 内一个线性无关向量组 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$. 证明存在 K 上一个齐次线性方程组以此向量组为一个基础解系.

14. 给定数域 K 上 n 维向量空间 K^n 内一个线性无关向量组 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$. 证明存在 K 上一个非齐次线性方程组满足如下条件:

(1) $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ 均为此非齐次线性方程组的解向量;

(2) 该方程组的任意解向量 γ 均能被 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ 线性表示.

15. 给定数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 A , $n \times s$ 矩阵 B . 设齐次线性方程组 $BX = 0$ 有一个基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$. 将它扩充为齐次线性方程组 $(AB)X = 0$ 的一个基础解系 $\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}, \dots, \eta_l$. 证明: 向量组 $B\eta_{k+1}, \dots, B\eta_l$ 的秩 $= r(B) - r(AB)$. 利用这个结果给出命题 4.6 的另一证明.
16. 设 A, B 分别是数域 K 上 $m \times n$ 矩阵和 $n \times s$ 矩阵, 令 $AB = C$. 若 $r(A) = n$. 又设 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的一个极大线性无关部分组是 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$. 试求 C 的列向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ 的一个极大线性无关部分组.