

第三章

线性方程组

向量组的线性相关性 · Cramer 法则的应用

齐次线性方程组 · 非齐次线性方程组

综合性问题 · 思考与练习

本节目次

本节目次

第三章 线性方程组	1
3.1 向量组的线性相关性	2
3.2 Cramer 法则的应用	19
3.3 齐次线性方程组	23
3.4 非齐次线性方程组	44
3.5 综合性问题	67
3.6 思考与练习	87
附录 思考与练习解答	94

第三章

线性方程组

线性方程组具有广泛应用，科学技术和工程中的大量问题往往归结为求解线性方程组。特别是计算机的迅速发展，使得求解含有成千上万个未知量的线性方程组成为可能，而这依赖于建立了统一的、程序化的求解线性方程组的有效算法。线性方程组是线性代数的理论基础，是研究线性代数其他内容的有力工具，在线性代数中占有重要地位。

3.1 向量组的线性相关性

基本理论与要点提示

3.1.1 向量组线性相关的若干结论

- (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示;
- (2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示式是唯一的;
- (3) 对于 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K^n$, 若 $m > n$, 则这 m 个向量必线性相关;
- (4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ 也线性相关; (可简述为: 相关组增加个数仍相关.)
- (5) 若 r 维向量组线性无关, 则将它每个向量添加 $n-r$ 个分量所成的 n 维向量组也线性无关. (可简述为: 无关组扩充分量仍无关.)

3.1.2 极大无关组的性质

- (1) 向量组的任一极大无关组与向量组本身等价;
- (2) 向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相同;
- (3) 对于向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与向量组 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 若向量组 A 线性无关, 且向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则 $r \leq s$;
- (4) 等价的线性无关组所含向量的个数相同;
- (5) 等价的向量组具有相同的秩;
- (6) 设向量组 A 的秩为 r_1 , 向量组 B 的秩为 r_2 , 若向量组 A 可由向量组 B 表示, 则 $r_1 \leq r_2$;
- (7) 向量组线性无关的充分必要条件是它所含向量的个数等于它的秩

3.1.3 向量组的秩与矩阵的秩的关系

- (1) 矩阵的秩, 与其行向量组的秩 (即行秩), 列向量组的秩 (即列秩), 此三秩相等;
- (2) 对一个矩阵施行初等行 (列) 变换, 不改变该矩阵的列 (行) 向量之间的线性关系;
- (3) 若矩阵 A 经有限次初等行 (列) 变换变成矩阵 B , 则 A 的行 (列) 向量组与 B 的行 (列) 向量组等价.

3.1.4 求向量组的秩与极大无关组

对于具体给出的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 求秩与极大无关组的通常做法是:

先以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 作为列向量构造矩阵 A , 再利用初等行变换将 A 化为行阶梯矩阵 T , 则 T 的主元 (即每个非零行的首非零元) 的个数 r 就是向量组的秩. 若 T 的主元的列下标为 $j_1, j_2, \dots, j_r$, 则 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}$ 就是向量组的一个极大无关组

典型问题解析

例 3.1 (数学—①, 2014 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ().

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

解 应选 (A). 事实上, 设 $\lambda_1(\alpha_1 + k\alpha_3) + \lambda_2(\alpha_2 + l\alpha_3) = \mathbf{0}$, 则

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + (k\lambda_1 + l\lambda_2)\alpha_3 = \mathbf{0}.$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ 所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关.

反之, 若 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 则不一定有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 例如, 设

$$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 0).$$

显然, 对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

因此, $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要条件但非充分条件

例 3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ().

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

解 应选 (A). 事实上, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

两边左乘 A , 得 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \dots + k_sA\alpha_s = \mathbf{0}$, 所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关. 这也表明选项 (B) 不正确.

当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关时, 若取 A 为单位矩阵, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关, 说明选项 (C) 不正确; 若取 A 为零矩阵, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 说明选项 (D) 不正确.

例 3.3 (清华大学, 2006 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组线性无关的向量. 问 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_1$ 是否线性无关? 请证明之

解 设 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 是一组数, 满足条件

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \dots + k_s(\alpha_s + \alpha_1) = 0,$$

则有

$$(k_s + k_1)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{s-1} + k_s)\alpha_s = 0.$$

据题设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 于是有

$$\begin{cases} k_1 & + k_s = 0, \\ k_1 + k_2 & = 0, \\ \dots\dots\dots & \\ k_{s-1} + k_s & = 0. \end{cases} \quad (①)$$

① 指全国硕士研究生统一招生考试题, 下同.

这是关于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 的齐次线性方程组, 其系数行列式为 s 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 2, & \text{若 } s \text{ 为奇数,} \\ 0, & \text{若 } s \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

若 s 为奇数, 则 $D = 2 \neq 0$, 故方程组①只有零解, 即 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 全为零. 此时向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_1$ 线性无关.

若 s 为偶数, 则 $D = 0$, 故方程组①有非零解. 此时向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_1$ 线性相关.

例 3.4 (华东师范大学, 2001 年) 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$. 试证:

- (1) 当 n 为偶数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关;
 (2) 当 n 为奇数时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

证 (1) 当 n 为偶数时, 由于

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) - (\alpha_n + \alpha_1) = 0,$$

即 $\beta_1 - \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} - \beta_n = \mathbf{0}$, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关.

(2) 当 n 为奇数时, 详见上一例的解答.

例 3.5 (哈尔滨工业大学, 2006 年) 设向量 $\beta_1 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4$. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

证 所述向量之间的关系式可用形式矩阵等式表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A,$$

其中矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

易知 $\det A = 189 \neq 0$, 所以 A 是可逆矩阵, 从而有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) A^{-1}.$$

这就表明, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 等价. 于是, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

例 3.6 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m (\beta \neq 0)$ 线性相关, 证明: $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有且仅有一个向量 $\alpha_i (1 \leq i \leq m)$ 可由其前面的向量线性表示.

证 先证 α_i 的存在性. 因为向量组 $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k, k_1, \dots, k_m$, 使

$$k\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m = 0. \quad (1)$$

设在①式中依从右到左的顺序第一个不为零的数为 k_i , 则 $k_i \neq k_i$ 因为如若不然, 有 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, 这时①式成为 $k\beta = 0$, 此与 $k \neq 0, \beta \neq 0$ 矛盾. 于是①式成为

$$k\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_i\alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq m). \quad (2)$$

因为 $k_i \neq 0$, 所以②式可变为

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i} (k\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1}),$$

即 α_i 可由其前面的向量 $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示.

再证 α_i 的唯一性 (用反证法). 假设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有两个不同的向量 $\alpha_i, \alpha_j (i < j)$ 可分别由其前面的向量线性表示:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= k\beta + k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1}, \\ \alpha_j &= l\beta + l_1\alpha_1 + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

④

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $k \neq 0$. 由③式有

$$\beta = -\frac{1}{k} (k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1}) + \frac{1}{k}\alpha_i.$$

将上式代入④式, 则有

$$\alpha_j = \frac{1}{k} [(kl_1 - lk_1)\alpha_1 + \dots + (kl_{i-1} - lk_{i-1})\alpha_{i-1} + (kl_i + l)\alpha_i] + l_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1},$$

这表明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ 线性相关, 从而 $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 此与题设条件矛盾, 故假设不成立. 唯一性得证.

例 3.7 (北京大学, 2010 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 并且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示. 证明: 必存在某个向量 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, t)$ 使得向量组 $\beta_j, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

证 取 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的一个极大无关组 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 线性表示. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以 $s \leq r$, 且 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

假设对任意 $\beta_{j_i} (i = 1, 2, \dots, r)$, 向量组 $\beta_{j_i}, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 β_{j_i} 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 所以向量组 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示. 因此这两个向量组等价, 从而

$$\text{rank}(\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}) = \text{rank}(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s)$$

于是有 $r = s - 1$, 矛盾. 故存在某个 $\beta_{j_i} (i = 1, 2, \dots, r)$ 使得向量组 $\beta_{j_i}, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例 3.8 (武汉大学, 2006 年) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 是 $n \times r$ 矩阵, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ 是 $n \times s$ 矩阵, $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$. 证明: 若 $r + s > n$, 则必存在非零向量 ξ , 使得 ξ 既可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 又可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示.

证 考虑向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 因为向量的个数 $r + s$ 大于向量的维数 n , 所以必线性相关, 故存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_s \beta_s = \mathbf{0}.$$

令 $\xi = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = -\lambda_1 \beta_1 - \lambda_2 \beta_2 - \dots - \lambda_s \beta_s$, 下证 $\xi \neq \mathbf{0}$ 若不然, 则

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_s \beta_s = \mathbf{0}.$$

因为 $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = s$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关. 于是有 $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$, 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$, 这和 $k_1, k_2, \dots, k_r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 不全为零矛盾. 故 $\xi \neq \mathbf{0}$

因此存在非零向量 ξ 使得 ξ 既可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 又可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示.

例 3.9 (天津大学, 2004 年) 设 $A_{n \times m} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $B_{n \times m} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件是 ().

- (A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性表示
 (B) 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示
 (C) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价
 (D) 矩阵 A 与矩阵 B 等价

解 应选 (D). 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \text{rank} A = m$, 所以

$$\begin{aligned}\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \text{ 线性无关} &\Leftrightarrow \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = m \\ &\Leftrightarrow \text{rank} B = \text{rank} A = m \\ &\Leftrightarrow \text{矩阵 } A \text{ 与 } B \text{ 等价.}\end{aligned}$$

另一方面, (A)(B)(C) 均不是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关的必要条件. 例如:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, 0, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \\ \beta_1 &= (0, 0, 1, 0)^T, \quad \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T,\end{aligned}$$

则 α_1, α_2 线性无关, 且 β_1, β_2 线性无关, 但 (A)(B)(C) 均不成立.

例 3.10 已知 n 维向量组

$$(I) : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \quad (II) : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t,$$

且 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$, 则 ().

- (A) 当 $s = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
 (B) 当 $s = t = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
 (C) 当 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价
 (D) 当 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = 2r$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价

解 应选 (C). 记向量组 (III) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

分别取 (I) 和 (II) 的一个极大无关组 $(I_0) : \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 与 $(II_0) : \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 则向量组 (I) 与 (I_0) 等价, 向量组 (II) 与 (II_0) 等价.

如果 $\text{rank}(\text{III}) = r$, 那么向量组 (I_0) 与 (II_0) 都是 (III) 的一个极大无关组. 这表明向量组 (I_0) 与 (II_0) 等价. 因此, 向量组 (I) 与 (II) 等价.

另一方面, 考虑向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T,$$

$$\beta_1 = (0, 0, 1, 0)^T, \quad \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

则 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2) = 2, \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 4$. 均不成立.

例 3.11 (重庆大学, 2006 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 证明: 对于任意常数 l , 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, l\beta_1 + \beta_2$ 总线性无关.

证 设有数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m + k(l\beta_1 + \beta_2) = \mathbf{0},$$

则必有 $k = 0$ 因若 $k \neq 0$, 则由上式知 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1$ 线性表示, 但依题设 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 与已知条件矛盾, 故 $k = 0$ 从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 故 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, l\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

例 3.12 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 为 $s+1$ 个 n 维向量 ($s > 1$), 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$. 证明: 向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

证 因为 $\beta - \alpha_i$ 可用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, $i = 1, 2, \dots, s$, 用矩阵表示即

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) P, \end{aligned}$$

易知 $\det P = (s-1)(-1)^{s-1} \neq 0$, 所以 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例 3.13 (数学三,1999 年) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则 ()

- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示
 (B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 但可由 (II) 线性表示
 (C) α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示
 (D) α_m 可由 (I) 线性表示, 但不可由 (II) 线性表示

解 应选 (B). 事实上, 据题设有 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$, 这里 $k_m \neq 0$, 否则 β 可由向量组 (I) 线性表示, 与题设矛盾. 所以有

$$\alpha_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{k_i}{k_m} \alpha_i + \frac{1}{k_m} \beta,$$

即 α_m 可由向量组 (II) 线性表示. 故可排除 (A)(D).

另一方面, 如果 α_m 可由 (I) 线性表示, 设为 $\alpha_m = \sum_{i=1}^{m-1} l_i \alpha_i$, 那么

$$\beta = \sum_{i=1}^{m-1} k_i \alpha_i + k_m \alpha_m = \sum_{i=1}^{m-1} (k_i + k_m l_i) \alpha_i,$$

即 β 可由 (I) 线性表示, 与题设矛盾, 故可排除 (C). 因此 (B) 是唯一正确选项

例 3.14 (南开大学,2012 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性相关. 证明 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性表示.

证 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ 也线性无关. 又 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性相关, 因此 α_{m+1} 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 设为

$$\alpha_{m+1} = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \dots + k_m\alpha_m. \quad (1)$$

假设 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性表示, 令

$$\alpha_1 = \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m + \lambda_{m+1}\alpha_{m+1},$$

则由①式得

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m + \lambda_{m+1}(k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m) \\ &= (\lambda_{m+1}k_2 + \lambda_2)\alpha_2 + \dots + (\lambda_{m+1}k_m + \lambda_m)\alpha_m, \end{aligned}$$

这表明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 矛盾. 所以 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}$ 线性表示.

例 3.15 (武汉大学, 2014 年) 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 表示为

$$\beta_i = \alpha_i + t_i \alpha_{s+1} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (1)$$

已知向量 $\alpha_{s+1} \neq \mathbf{0}$ 试证明: 如果对任意一组实数 $t_1, t_2, \dots, t_s$ 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 必线性无关.

证 用反证法. 假设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性相关, 则有不全为零的数 $k_1, \dots, k_s, k_{s+1}$ 使

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s + k_{s+1} \alpha_{s+1} = \mathbf{0}.$$

据 $\alpha_{s+1} \neq \mathbf{0}$ 易知 $k_1, \dots, k_s$ 不全为零. 记 $\mathbf{Y} = (k_1, \dots, k_s, k_{s+1})^T$, 将①式用矩阵形式表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}) \mathbf{T}, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{T}$ 为 $(s+1) \times s$ 矩阵, 即

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_s \end{pmatrix}.$$

考虑含有 s 个未知数的方程组 $\mathbf{TX} = \mathbf{Y}$, 对其增广矩阵施行初等行变换, 有

$$(\mathbf{T}, \mathbf{Y}) \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{E}_s^* \\ \mathbf{0} k_{s+1} - \sum_{i=1}^s k_i t_i \end{pmatrix}.$$

可见, 只需取一组 $t_1, t_2, \dots, t_s$, 使得 $\sum_{i=1}^s k_i t_i = k_{s+1}$, 从而 $\text{rank}(\mathbf{T}, \mathbf{Y}) = \text{rank} \mathbf{T} = s$, 故 $\mathbf{TX} = \mathbf{Y}$ 有解, 设这个解为 $X_0 = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T$, 即 $\mathbf{TX}_0 = \mathbf{Y}$, 且 $X_0 \neq \mathbf{0}$ 对②式两边右乘 X_0 , 得

$$\sum_{i=1}^s c_i \beta_i = \sum_{i=1}^{s+1} k_i \alpha_i = \mathbf{0},$$

即存在一组 $t_1, t_2, \dots, t_s$, 使 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关, 与题设矛盾. 因此, $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

【注 1】 注意到 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为零, 不妨设 $k_l \neq 0 (1 \leq l \leq s)$, 令

$$t_i = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ \frac{k_{s+1}}{k_l}, & i = l, \end{cases}$$

对于这一组 $t_1, t_2, \dots, t_s$ 有 $\sum_{i=1}^s k_i \beta_i = \sum_{i=1}^{s+1} k_i \alpha_i = \mathbf{0}$, 也导致矛盾.

【注 2】 本题的逆命题 “若 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.” 也正确. 请读者给出其证明.

例 3.16 (哈尔滨工业大学, 2005 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量, $\beta_i = \sum_{j=1}^r k_{ij} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, r$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关的充分必要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rr} \end{pmatrix}$$

不可逆.

证 记

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rr} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix},$$

则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r x_i \beta_i = \mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^r (\sum_{i=1}^r k_{ij} x_i) \alpha_j = \mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 方程组 $K^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解 (因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关) $\Leftrightarrow K$ 是非奇异的.

因此, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关的充分必要条件是矩阵 K 不可逆

注 更一般地, 有 $\text{rank} \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} = \text{rank} K$. 参见第 5 章例 5.22 及其附注

例 3.17 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 的一个基, $\alpha_{n+1} = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 全不为零. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中的任意 n 个向量都构成 K^n 的一个基.

证 只需证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 线性无关即可. 因为

$$\begin{aligned} |A| &\stackrel{\text{def}}{=} |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}| \\ &= \left| \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \sum_{l=1}^n k_l \alpha_l \right| \\ &\stackrel{c_n - k_j \times c_j}{=} |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, k_i \alpha_i| \\ &= k_i |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_i| \neq 0, \end{aligned}$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 线性无关.

例 3.18 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 中的向量组, 试证明下述命题相互等价:

- (1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;
- (2) K^n 中的任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- (3) K^n 中的自然基向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

证 采用循环证法: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$ 因为 $\dim(K^n) = n$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 K^n 的一个基, 故 K^n 中的任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

$(2) \Rightarrow (3)$ 显然.

$(3) \Rightarrow (1)$ (方法 1) 用反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则其中至少有一个向量, 不妨设为 α_1 , 可由其余向量 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 线性表示. 由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 因而可由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 注意到向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关, 得 $n \leq n-1$, 矛盾. 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

(方法 2) 因为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 所以 $n = \text{rank}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\} \leq \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \leq n$, 由此得 $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = n$, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

例 3.19 已知向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 设各向量组的秩分别为 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II) = 3, \text{rank}(III) = 4$. 证明: 向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4\}$ 的秩为 4.

证 因为 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II) = 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 即存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使

$$\alpha_4 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3. \quad (1)$$

设有数 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 (\alpha_5 - \alpha_4) = 0.$$

将①式代入上式并整理, 得

$$(k_1 - \lambda_1 k_4) \alpha_1 + (k_2 - \lambda_2 k_4) \alpha_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4) \alpha_3 + k_4 \alpha_5 = 0.$$

由 $\text{rank}(III) = 4$ 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 - \lambda_1 k_4 = 0, \\ k_2 - \lambda_2 k_4 = 0, \\ k_3 - \lambda_3 k_4 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases}$$

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 即其秩为 4.

例 3.20 (数学二, 2000 年) 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

解 易知, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 且 α_1, α_2 是它的一个极大无关组.

(方法 1) 由于向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 具有相同的秩, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 从而行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a - 3b) = 0, \text{ 解得 } a = 3b.$$

又 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而可由 α_1, α_2 线性表示, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 线性相关. 于是, 有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2b - 10 = 0, \text{ 解得 } b = 5.$$

于是得 $a=15, b=5$

(方法 2) 因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有解. 对其增广矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3)$ 施行初等行变换, 有

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right),$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$, 解得 $b=5$

又由题设知, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也是 2, 则行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 15 - a = 0$$

例 3.21 设 $b \neq 0$, 讨论向量组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \\ \alpha_2 &= (b, 1, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \\ \alpha_3 &= (b^2, b, 1, a_{33}, \cdots, a_{3n}), \\ &\vdots \\ \alpha_{n+1} &= (b^n, b^{n-1}, b^{n-2}, \cdots, 1). \end{aligned}$$

的线性相关性

解 考虑以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n+1}$ 为行向量的 $n+1$ 阶方阵的行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b & 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b^2 & b & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

易知, $D_{n+1} = \prod_{k=1}^n (1 - ba_{kk})$. 所以, 当 $1 - ba_{kk} \neq 0$ 即 $a_{kk} \neq \frac{1}{b} (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时, $D_{n+1} \neq 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n+1}$ 线性无关; 否则, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n+1}$ 线性相关.

例 3.22 (东南大学, 2005 年) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关. 问: 当参数 t_1, t_2 满足什么条件时, 向量组 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \cdots, \beta_{s-1} = t_1\alpha_{s-1} + t_2\alpha_s$ 是线性无关的?

解 显然, 如果 $t_1 = 0$ 且 $t_2 = 0$, 那么 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ 都是零向量, 当然线性相关.

下设 $t_1 \neq 0$ 或 $t_2 \neq 0$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ 之间有如下关系式

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) T,$$

其中, T 为如下 $s \times (s-1)$ 矩阵

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & t_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & t_2 \end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 T 的前 $s-1$ 行和后 $s-1$ 行构成的子式分别为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^{s-1}, \quad \begin{vmatrix} t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & t_2 \end{vmatrix} = t_2^{s-1},$$

所以, 当 $t_1 \neq 0$ 或 $t_2 \neq 0$ 时, $\text{rank } T = s-1$. 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_{s-1}\beta_{s-1} = \mathbf{0}$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)Tx = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1})x = \mathbf{0},$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{s-1})^T$ 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 所以 $Tx = \mathbf{0}$, 从而 $x = \mathbf{0}$ 于是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ 线性无关.

例 3.23 (北京航空航天大学, 2004 年) 设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}, \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ 的秩分别为 s_1, s_2, s_3 , 其中 $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i, i = 1, 2, \cdots, m$. 证明: $s_1 \leq s_2 + s_3, s_2 \leq s_1 + s_3, s_3 \leq s_1 + s_2$

证 因为 $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 所以向量组 $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ 可由向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 线性表示, 故

$$\begin{aligned} s_3 &= \text{rank} \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\} \leq \text{rank} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\} \\ &\leq \text{rank} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} + \text{rank} \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\} \\ &= s_1 + s_2. \end{aligned}$$

同理, 由 $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ 可证 $s_1 \leq s_2 + s_3$, 由 $\beta_i = \alpha_i - \gamma_i$ 可证 $s_2 \leq s_1 + s_3$

例 3.24 (武汉大学, 2011 年) 已知 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关. 证明:

(1) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 则系数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 或者全为零, 或者全不为零;

(2) 若 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 且 $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 其中 $b_1 \neq 0$, 则

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_m}{b_m}$$

证 (1) 若 $k_i \neq 0 (1 \leq i \leq m)$, 则结论成立; 若存在某个 $k_i = 0$, 则

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中任意 $m-1$ 个向量都线性无关, 所以 $k_1 = \cdots = k_{i-1} = k_{i+1} = \cdots = k_m = 0$.

(2) 据题设 $b_1 \neq 0$, 则由 (1) 知 $b_i \neq 0 (2 \leq i \leq m)$. 如果 $a_1 = 0$, 那么 $a_i = 0 (2 \leq i \leq m)$, 结论成立. 设 $a_1 \neq 0$, 则由题设两个等式可得

$$(b_1a_2 - a_1b_2)\alpha_2 + (b_1a_3 - a_1b_3)\alpha_3 + \cdots + (b_1a_m - a_1b_m)\alpha_m = \mathbf{0}.$$

因为 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 所以

$$b_1a_2 - a_1b_2 = 0, b_1a_3 - a_1b_3 = 0, \cdots, b_1a_m - a_1b_m = 0,$$

即得 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_m}{b_m}$

例 3.25 (南京航空航天大学, 2016 年) 设有向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ a \end{pmatrix}; \quad (II): \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 线性相关;

(2) 求 a 的值, 使得向量组 (I) 不能由向量组 (II) 线性表示;

(3) 在题 (1) 和 (2) 同时成立的情况下, 将向量 $\gamma = (1, -2, -5)^T$ 用 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 线性表示.

解 (1) 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则行列式 $\det A = 0 \Leftrightarrow$ 向量组 (I) 线性相关. 易知

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & a \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-4).$$

令 $\det A = 0$, 解得 $a = -2$ 或 $a = 4$,

(2) 令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由于向量组 (I) 不能由 (II) 线性表示, 所以向量组 (II) 线性相关. 因若不然, 则任 $-\alpha_i$ 可由向量组 (II) 线性表示, 矛盾. 因此, $\det B = 0$. 易知

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2).$$

令 $\det B = 0$, 解得 $a = -2$ 或 $a = 1$.

当 $a = 1$ 时, $\alpha_3 = (-2, 1, 1)^T, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1, 1, 1)^T$ 显然, α_3 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 所以 $a = 1$ 符合题意.

当 $a = -2$ 时, 把 (B, A) 化为简化行阶梯矩阵, 有

$$(B, A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

由此可见, α_3 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 所以 $a = -2$ 也符合题意.

(3) 若 (1) 和 (2) 同时成立, 则 $a = -2$ 此时, 把 $(\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \gamma)$ 化为简化行阶梯矩阵, 有

$$(\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \gamma) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

注意到初等行变换不改变列向量之间的线性关系, 所以有 $\gamma = 2\beta_1 + \beta_2 + \alpha_3$

3.2 Cramer 法则的应用

基本理论与要点提示

Cramer 法则如果数域 K 上的含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么此方程组有唯一解 $(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D})$, 其中 D_j 是把 D 中第 j 列的元素换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 而成的行列式 ($j = 1, 2, \dots, n$), 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地, 当 $b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 如果系数行列式 $D \neq 0$, 那么方程组只有零解; 反之, 如果方程组有非零解, 那么必有 $D = 0$

典型问题解析

例 3.26 (华中科技大学, 2005 年) 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3, \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3, \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3, \end{cases}$$

其中 a, b, c 是互不相等的常数.

解 利用 Cramer 法则求解. 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a) \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = abcD,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = -(ab+ac+bc)D,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)D,$$

故

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = abc, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -ab - ac - bc, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = a + b + c.$$

注 本例的一般情形及其解法详见第 1 章例 1.120.

例 3.27 (浙江大学, 2010 年) 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明 $f(x)$ 的系数都是有理数. 举例说明存在不是整系数的多项式满足对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数.

解 设复系数一元多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m (a_m \neq 0)$$

取 $x_k = k (k = 0, 1, \cdots, m)$, 代入上式, 得

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_mx_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_mx_1^m = f(x_1), \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \cdots + a_mx_m^m = f(x_m). \end{cases} \quad (1)$$

这是关于 $m+1$ 个未知量 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 的非齐次线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j) = \prod_{k=1}^m k! \neq 0.$$

根据 Cramer 法则, 线性方程组①有唯一解 $a_i = \frac{D_i}{D} (i = 0, 1, \cdots, m)$, 其中

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{i-1} & f(x_0) & x_0^{i+1} & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & f(x_1) & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^{i-1} & f(x_m) & x_m^{i+1} & \cdots & x_m^m \end{vmatrix}.$$

因为 D_i 的元素均为整数, 所以 D_i 为整数, 从而 a_i 为有理数.

例如 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ 的系数不是整数, 显然满足对任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数.

例 3.28 (武汉大学, 1994 年) 试利用线性方程组理论证明: 一元 n 次多项式不能有多于 n 个互异的根

证 采用反证法. 假定存在一个 n 次多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n (a_n \neq 0)$$

有 $n+1$ 个互异的根 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$, 那么

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = 0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = 0. \end{cases} \quad (①)$$

这可以视为关于 $n+1$ 个未知量 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的齐次线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

根据 Cramer 法则, 齐次线性方程组①只有零解, 从而 $a_n = 0$, 与已知矛盾.

例 3.29 (南开大学, 2010 年) 证明: 如果一个球面的球心 (x_0, y_0, z_0) 至少有一个坐标是无理数, 那么该球面上任意不在同一平面的四点中至多三个点的坐标都是有理数

证 用反证法. 设球面的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2$$

假设此球面上存在四点 $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$, 不在同一平面上但它们的坐标都是有理数. 代入上式并相减, 得

$$(x_2 - x_1) \left(x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2} \right) + (y_2 - y_1) \left(y_0 - \frac{y_2 + y_1}{2} \right) + (z_2 - z_1) \left(z_0 - \frac{z_2 + z_1}{2} \right) = 0,$$

$$(x_3 - x_1) \left(x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2} \right) + (y_3 - y_1) \left(y_0 - \frac{y_3 + y_1}{2} \right) + (z_3 - z_1) \left(z_0 - \frac{z_3 + z_1}{2} \right) = 0,$$

$$(x_4 - x_1) \left(x_0 - \frac{x_4 + x_1}{2} \right) + (y_4 - y_1) \left(y_0 - \frac{y_4 + y_1}{2} \right) + (z_4 - z_1) \left(z_0 - \frac{z_4 + z_1}{2} \right) = 0,$$

即

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 + (z_2 - z_1)z_0 = D_1, \\ (x_3 - x_1)x_0 + (y_3 - y_1)y_0 + (z_3 - z_1)z_0 = D_2, \\ (x_4 - x_1)x_0 + (y_4 - y_1)y_0 + (z_4 - z_1)z_0 = D_3, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} D_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2), \\ D_2 = \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2), \\ D_3 = \frac{1}{2}(x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2). \end{cases}$$

这就说明, 球心的坐标 (x_0, y_0, z_0) 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = D_1, \\ (x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + (z_3 - z_1)z = D_2, \\ (x_4 - x_1)x + (y_4 - y_1)y + (z_4 - z_1)z = D_3 \end{cases} \quad (1)$$

的一个解. 因为 M_1, M_2, M_3, M_4 四点不在同一平面上, 所以方程组①的系数行列式

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

根据 Cramer 法则, 方程组①有唯一解, 即 (x_0, y_0, z_0) . 又方程组①的系数均为有理数, 所以解向量 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Q}^3$, 此与题设条件矛盾. 因此结论成立.

3.3 齐次线性方程组

基本理论与要点提示

数域 K 上的含有 n 个未知量 m 个方程的齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$, 也记为 $\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j = \mathbf{0}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为系数矩阵 A 的列向量.

3.3.1 解空间与基础解系

(1) 齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的所有解的集合 S 构成 K^n 的一个子空间, 称为该方程组的解空间. 非零解空间 S 的一个基称为该方程组的基础解系;

(2) 齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间 S 的维数 $\dim S = n - \text{rank } A$.

3.3.2 齐次方程组有非零解的条件及通解

齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\text{rank } A < n$. 此时它的通解为

$$x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_{n-r} \xi_{n-r},$$

其中 $r = \text{rank } A, k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in K$ 为任意常数, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为方程组的一个基础解系.

3.3.3 求齐次方程组基础解系的方法

利用 Gauss 消元法求解齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的一般原理: 设系数矩阵 A 的秩 $\text{rank } A = r$, 用初等行变换将 A 化成简化行阶梯矩阵 T , 不妨设 T 的 r 个主元位于 T 的前 r 列, 即

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_n$$

分别取自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ 为下列 $n-r$ 个单位向量:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

相应地, 即可求得方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

典型问题解析

例 3.30 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解
 (B) 当 $n > m$ 时必有非零解 (C) 当 $m > n$ 时仅有零解
 (D) 当 $m > n$ 时必有非零解

解 这里, 未知数向量 x 是 m 维的. 因为 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank} A \leq \min\{m, n\}$, 所以当 $m > n$ 时 $\text{rank}(AB) < m$, 方程组 $(AB)x = 0$ 有非零解. 故应选 (D).

例 3.31 (数学一, 2003 年) 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

- ① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则 $\text{rank} A \geq \text{rank} B$
- ② 若 $\text{rank} A \geq \text{rank} B$, 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;
- ③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 $\text{rank} A = \text{rank} B$
- ④ 若 $\text{rank} A = \text{rank} B$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是 ().

(A) ① ②

(B) ① ③

(C) ② ④

(D) ③ ④

解 本题可先找出一个正确项, 以缩小选择范围.

若齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则它们的解空间相同, 所以 $n - \text{rank} A = n - \text{rank} B$, 即 $\text{rank} A = \text{rank} B$. 因此命题③成立, 故可排除选项 (A)(C). 反之, 当 $\text{rank} A = \text{rank} B$ 时, 不能推出 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解. 例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

虽然 $\text{rank} A = \text{rank} B = 1$, 但 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 显然不同解, 所以命题④不正确, 由此又可排除选项 (D). 故应选 (B).

例 3.32 求 λ 的值, 使齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = 0, \\ 3(\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 并求出其一般解

解 易知, 方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 & 1 \\ 3\lambda + 3 & \lambda & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1).$$

所以, 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时齐次方程组有非零解

进一步, 当 $\lambda = 0$ 时, 对方程组的系数矩阵施行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时, 方程组的一般解为 $x = k(-1, 1, 1)$

当 $\lambda=1$ 时, 系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 可求得方程组的一般解为 $x = k(-1, 2, 1)$, 其中 k 为任意常数

例 3.33 (南开大学, 2005 年) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ -x_1 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ax_1 + cx_2 - ex_4 = 0, \\ bx_1 + dx_2 - ex_3 = 0 \end{cases}$$

的一般解以 x_3, x_4 为自由未知量.

- (1) 求 a, b, c, d, e 满足的条件;
- (2) 求齐次线性方程组的基础解系.

解 (1) 对方程组的系数矩阵施行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ -1 & 0 & c & d \\ a & c & 0 & -e \\ b & d & -e & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c & -d \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & bc - ad - e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ad - bc - e \end{pmatrix},$$

显然, 欲使方程组的一般解以 x_3, x_4 为自由未知量, 必需 $\begin{cases} bc - ad - e = 0, \\ ad - bc - e = 0, \end{cases}$ 亦即 $\begin{cases} ad = bc, \\ e = 0. \end{cases}$,

- (2) 当 a, b, c, d, e 满足 (1) 的条件时, 根据上述初等变换结果可得方程组的基础解系为

$$\xi_1 = (c, -a, 1, 0)^T, \quad \xi_2 = (d, -b, 0, 1)^T.$$

例 3.34 (中国科学院,2005 年) 设四元齐次线性方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1)$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解, 若没有, 则说明理由.

解 (1) 由已知, 方程组 (I) 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

故 (I) 的基础解系可取为 $(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)$

(2) 有非零公共解.

将方程组 (II) 的通解代入方程组 (I), 则有

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0, \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0. \end{cases}$$

解得 $k_1 = -k_2$ 当 $k_1 = -k_2 \neq 0$ 时, 则向量

$$k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1) = k_2[(0, -1, -1, 0) + (-1, 2, 2, 1)]$$

满足方程组 (I)(显然是 (II) 的解). 因此 (I) 与 (II) 有非零公共解, 所有非零公共解是 $k(-1, 1, 1, 1)$

其中 k 是不为零的任意常数

例 3.35 (西安电子科技大学,2005 年) 设四元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 问当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解

解 (1) 由已知, 方程组 (I) 的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 可用初等行变换化为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, 故 (I) 的基础解系可取为

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \quad \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

(2) 显然, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解等价于 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_3\alpha_1 + k_4\alpha_2$, 且 k_1, k_2 不同时为零. 这又归结为关于 k_1, k_2, k_3, k_4 的齐次线性方程组

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - k_3\alpha_1 - k_4\alpha_2 = 0$$

有非零解, 且 k_1, k_2 不同时为零.

对 (III) 的系数矩阵施行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & a+1 & -(a+1) \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

可见, 当 $a \neq -1$ 时, $\text{rank}A = 4$, 方程组 (III) 仅有零解; 当 $a = -1$ 时, $\text{rank}A = 2$, 方程组 (III) 有非零解. 易知, 其通解为

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2,$$

其中 c_1, c_2 取任意常数, 而

$$\eta_1 = (1, 1, 1, 0), \quad \eta_2 = (4, 7, 0, 1).$$

注意到 $k_1 = c_1 + 4c_2$, 所以 k_1, k_2 同时为零当且仅当 c_1, c_2 同时为零.

综上所述, 当且仅当 $a = -1$ 时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解, 且全部非零公共解为 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2$, 其中 k_1, k_2 取不同时为零的任意常数.

例 3.36 (华南理工大学, 2015 年) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad (II): \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

解 注意到齐次方程组 (II) 的未知量个数大于方程的个数, 所以 (II) 必有非零解. 据题设 (I) 与 (II) 同解, 因此 (I) 也有非零解. 对 (I) 的系数矩阵 A 作初等行变换, 得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

因为 $\text{rank } A < 3$, 所以 $a=2$. 此时, 可求得方程组 (I) 的一个基础解系为 $\eta = (1, 1, -1)^T$

将 $\eta = (1, 1, -1)^T$ 代入方程组 (II), 可得 $b=0, c=1$ 或 $b=1, c=2$.

当 $b=0, c=1$ 时, (II) 的系数矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\text{rank } B < \text{rank } A$, 可见方程组 (II) 与方程组 (I) 不同解.

当 $b=1, c=2$ 时, (II) 的系数矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 所以 (II) 与 (I) 同解.

综上所述, 当且仅当 $a=2, b=1, c=2$ 时, 方程组 (I) 与方程组 (II) 同解

例 3.37 (电子科技大学, 2010 年) 已知齐次线性方程组

(I)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ ax_1 + a^2x_3 = 0, \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解满足方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 (I) 的通解.

解 (1) 先求方程组 (I) 的解, 再代入方程 (II), 以确定 a 的值. 当 $a=0$ 时, (I) 成为 $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ 它的解显然不可能都满足 (II).

例如 $x_1 = x_3 = 2, x_2 = x_4 = -1$ 是 (I) 的解, 但不是 (II) 的解. 说明 $a = 0$ 不合要求. 当 $a \neq 0$ 时, 对 (I) 的系数矩阵施行初等行变换, 可得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a} \end{pmatrix}.$$

故方程组 (I) 的通解为

$$x = c \left(a-1, -a, \frac{1-a}{a}, 1 \right)^T.$$

再将 x 代入 (II), 得 $(a-1) - a + \frac{1-a}{a} = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$

(2) 此时, 方程组 (I) 的通解为 $x = c \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1 \right)^T$, 其中 c 是任意常数.

例 3.38 (上海师范大学, 2005 年) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2).$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解? 并求出其通解

【分析】 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组, 可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为行阶梯形矩阵, 再讨论其秩是否小于 n , 进而判断是否有非零解; 也可直接计算系数矩阵的行列式, 根据题设条件行列式的值必为零, 由此对参数 a 的可能取值进行讨论. 这里只给出第一种解法

解 对方程组的系数矩阵作初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i - r_1} \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \rightarrow B.$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $\text{rank} A = 1 < n$, 故方程组有非零解, 其同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T$$

于是方程组的通解为

$$x = c_1 \boldsymbol{\eta}_1 + c_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_{n-1} \boldsymbol{\eta}_{n-1}, \text{ 其中 } c_1, c_2, \cdots, c_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 继续对矩阵 B 作初等行变换, 有

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_i} \begin{pmatrix} a + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

可见, 当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $\text{rank} A = n-1 < n$, 故方程组有非零解, 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0. \end{cases}$$

由此解得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = (1, 2, \cdots, n)^T.$$

因此, 方程组的通解为

$$x = c\boldsymbol{\eta}, \text{ 其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

例 3.39 (厦门大学, 2011 年; 数学三, 2002 年) 设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$ 试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解、有无穷多个解? 在有无穷多个解时, 求出一般解, 并用基础解系表示一般解.

解 方程组的系数行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时, 方程组仅有零解.

(2) 当 $a = b$ 时, 对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换, 有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times \frac{1}{a}]{r_i - r_1} \begin{pmatrix} \frac{r_i - r_1}{(i=2,3,\cdots,n)} \\ \frac{1}{r_1 \times \frac{1}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \alpha_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

于是方程组的一般解是

$$x = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_{n-1} \alpha_{n-1}, \text{ 其中 } c_1, c_2, \cdots, c_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

(3) 当 $a = (1-n)b$ 时, 对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & (1-n)b \end{pmatrix} \xrightarrow{c_i \times \frac{1}{b}} \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_i \times (-\frac{1}{n})]{i=2,3,\cdots,n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_i - r_i]{i=2,3,\cdots,n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以方程组的基础解系为

$$\beta = (1, 1, \cdots, 1)^T.$$

因此, 方程组的一般解为 $x = c\beta$, 其中 c 为任意常数.

例 3.40 (北京交通大学, 2005 年) 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

的一个基础解系为

$$(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^T, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^T.$$

求线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

的通解, 并说明理由

解 将方程组 (I), (II) 的系数矩阵分别记为 $A = (a_{ij})_{n \times 2n}$, $B = (b_{ij})_{n \times 2n}$. 据题设, 知 B 的 n 个行向量为 (I): $Ax=0$ 的一个基础解系, 即 $AB^T = O$, 且 $\text{rank } B = n$, 所以 $BA^T = O$ 且 $\text{rank } A = 2n - \text{rank } B = n$, 即 A 的 n 个行向量为 (II): $By = 0$ 的一个基础解系. 于是, 线性方程组 (II) 的通解为

$$y = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1,2n} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2,2n} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n,2n} \end{pmatrix},$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意常数.

例 3.41 (浙江大学, 2003 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 s 个线性无关的向量. 证明: 存在含 n 个未知量的齐次线性方程组, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是它的一个基础解系.

解 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, 2, \dots, s$. 考虑 n 元齐次线性方程组

(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以 (I) 的系数矩阵的秩为 s , 其基础解系含 $n - s = r$ 个解向量. 现设 $\beta_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn}), j = 1, 2, \dots, r$ 是 (I) 的一个基础解系, 并构造 n 元齐次方程组

(II)

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ b_{r1}y_1 + b_{r2}y_2 + \dots + b_{rn}y_n = 0. \end{cases}$$

显然, 方程组 (II) 的基础解系含 $n - r = s$ 个解向量. 由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是 (I) 的解易知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 (II) 的解, 因而是 (II) 的一个基础解系.

注 上述证明可用矩阵方式叙述如下. 这里, 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是列向量, 并令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 所以 $\text{rank } A = s$, 齐次线性方程组 $A^T x = \mathbf{0}$ 的基础解系含 $n - s$ 个解向量, 设它的一个基础解系为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-s}$, 则

$$A^T \beta_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - s.$$

令 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-s})$, 则 $\text{rank } B = n - s$, 且 $A^T B = \mathbf{O}$, 或 $B^T A = \mathbf{O}$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 都是含 n 个未知量的齐次线性方程组 $B^T y = \mathbf{0}$ 的解, 因而是 $B^T y = \mathbf{0}$ 的一个基础解系.

例 3.42 (东南大学,2004 年; 华南理工大学,2014 年) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 试讨论 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 b 满足何种条件时,

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 此时, 用基础解系表出所有解.

解 方程组系数矩阵 A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

(1) 当 $b \neq 0$ 且 $b + \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ 时, $\text{rank} A = n$, 方程组仅有零解

(2) 当 $b=0$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解. 此时, 原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

因为 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, 所以至少有一个 $a_i \neq 0$, 不妨设 $a_1 \neq 0$ 可解得方程组的一个基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -a_3 \\ a_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -a_n \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时, $|A| = 0$, 方程组有非零解. 此时, $b \neq 0$. 对系数矩阵 A 施行初等行变换, 有

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得方程组的同解方程组为

$$x_2 = x_1, x_3 = x_1, \cdots, x_n = x_1.$$

所以方程组的一个基础解系为 $\xi = (1, 1, \cdots, 1)$, 通解为 $x = k\xi$, 其中 k 为任意常数.

例 3.43 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $\text{rank} A + \text{rank} B < n$, 证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解.

证 因为 $\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \text{rank} A + \text{rank} B < n$, 所以齐次方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 有非零解, 这等价于方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解.

例 3.44 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 m 阶可逆矩阵, 证明: 若 A^T 的列向量组是齐次线性方程组 $Cx = 0$ 的一个基础解系, 则 $(BA)^T$ 的列向量组也是 $Cx = 0$ 的一个基础解系.

证 因为 A^T 的列向量组是方程组 $Cx=0$ 的一个基础解系, 所以 $\text{rank}(A^T) = m, CA^T = 0$, 且 $Cx = 0$ 的基础解系含 m 个解向量.

因为 B 是可逆矩阵, 所以 $\text{rank}((BA)^T) = \text{rank}(A^T) = m$, 即 $(BA)^T$ 的列向量组线性无关. 又 $C(BA)^T = 0$, 即 $(BA)^T$ 的列向量都是 $Cx = 0$ 的解. 于是, $(BA)^T$ 的列向量组是 $Cx = 0$ 的一个基础解系.

例 3.45 (华中师范大学, 2000 年; 厦门大学, 2010 年) 设 $A \in P^{m \times n}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, $B = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r})$. 证明: 如果 $AC = 0$ (其中 $C \in P^{n \times t}$), 那么存在唯一的矩阵 D , 使 $C = BD$.

证 先证 D 的存在性. 设 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$, 则由 $AC = 0$ 可知

$$A\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, t.$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 均为齐次方程组 $AX = 0$ 的解, 故可由 $AX = 0$ 的基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表示. 设 $\alpha_j = d_{1j}\eta_1 + d_{2j}\eta_2 + \cdots + d_{n-r,j}\eta_{n-r}, j = 1, 2, \cdots, t$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1t} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-r,1} & d_{n-r,2} & \cdots & d_{n-r,t} \end{pmatrix}.$$

令 $D = (d_{ij})_{(n-r) \times t}$, 则 $C = BD$

再证 D 的唯一性. 设另有 $(n-r) \times t$ 矩阵 D_1 使 $C = BD_1$, 则 $BD = BD_1$, 即 $B(D - D_1) = O$. 所以 $D - D_1$ 的列向量均为齐次线性方程组 $BX = 0$ 的解. 因为 $\text{rank} B = n - r$, 所以 $BX = 0$ 仅有零解, 故 $D - D_1 = O$, 即 $D_1 = D$.

例 3.46 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系 $s, t \in \mathbb{R}$. 又设

$$\beta_1 = s\alpha_1 + t\alpha_2, \dots, \beta_{k-1} = s\alpha_{k-1} + t\alpha_k, \beta_k = s\alpha_k + t\alpha_1.$$

试问: s, t 满足什么关系时, 使得 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系; 反之, 当 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系时, 这个关系必须成立.

解 显然 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 都是方程组 $Ax = 0$ 的解. 因为 $Ax = 0$ 的基础解系含有 k 个解向量, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 线性无关.

易知, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 之间有关系式:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) T,$$

其中, T 为如下 k 阶方阵

$$T = \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & t \\ t & s & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & t & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & s & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t & s \end{pmatrix}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$

经计算, 矩阵 T 的行列式为

$$\det T = s^k + (-1)^{k+1} t^k.$$

于是, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系当且仅当 $s^k + (-1)^{k+1} t^k \neq 0$.

例 3.47 (湖南大学, 2011 年) 设 A, B 分别为 $m \times n$ 与 $n \times m$ 矩阵, C 为 n 阶可逆矩阵, 且 $\text{rank } A = r < n$, $A(C + BA) = O$. 证明:

(1) $\text{rank}(C + BA) = n - r$;

(2) 线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $x = (C + BA)z$, 其中 z 为任意的 n 维列向量

证 (1) 由 $A(C + BA) = O$, 知 $\text{rank } A + \text{rank}(C + BA) \leq n$, 所以 $\text{rank}(C + BA) \leq n - r$.

另一方面, 注意到 $\text{rank } C = n$, 且 $\text{rank}(BA) \leq \text{rank } A$, 所以

$$\text{rank}(C + BA) \geq \text{rank } C - \text{rank}(BA) \geq n - \text{rank } A = n - r.$$

因此 $\text{rank}(C + BA) = n - r$.

(2) 由 $\text{rank } A = r < n$, 可知 $Ax = 0$ 有基础解系, 并且其任一基础解系含 $n - r$ 个解. 又由条件 $A(C + BA) = O$ 及 (1) 的结论, 可知 $C + BA$ 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解, 且其中任意 $n - r$ 个线性无关的列向量构成 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 注意到该基础解系与 $C + BA$ 的列向量组是等价的, 所以 $Ax = 0$ 的通解 x 可由 $C + BA$ 的列向量组线性表示, 即 $x = (C + BA)z$, 其中 z 为任意的 n 维列向量.

注 本题 (1) 的另一有效证法: 因为 $A(C + BA) = O$, 所以 $\text{rank } A + \text{rank}(C + BA) \leq n$. 若 $\text{rank } A + \text{rank}(C + BA) < n$, 则由本章例 3.43 知, 方程组 $Ax = 0$ 与 $(C + BA)x = 0$ 有非零公共解 x_0 , 即 $Ax_0 = 0, (C + BA)x_0 = 0$, 从而有 $Cx_0 = 0$ 因为 C 为可逆矩阵, 所以 $x_0 = 0$, 矛盾. 因此 $\text{rank } A + \text{rank}(C + BA) = n$.

例 3.48 (北京大学, 2007 年) 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 A 与 B 的列向量组是否等价? 行向量组是否等价? 若是, 则给出证明; 若否, 则举出反例.

解 第 1 个结论不成立. 例如: 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 但 A 与 B 的列向量组显然不等价. 第 2 个结论成立, 兹证明如下:

因为方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 所以 $\text{rank } A = \text{rank } B$. 记 $r = n - \text{rank } A$, 先考虑 $r \geq 1$ 的情形. 任取 $Ax = 0$ 的一个基础解系 (当然也是 $Bx = 0$ 的一个基础解系) 构成 $n \times r$ 矩阵 C , 则 $\text{rank } C = r$, 且 $AC = O, BC = O$

考虑齐次线性方程组 $C^T x = 0$, 其解空间 S 的维数 $\dim S = n - r = \text{rank } A$. 因为 $C^T A^T = O$, 所以 A 的行向量都是 $C^T x = 0$ 的解, 因此 A 的行空间 W_A 是 S 的一个子空间, 即 $W_A \subseteq S$. 注意到 $\dim W_A = \text{rank } A = \dim S$, 故 $W_A = S$

同理, B 的行空间 $W_B = S$. 于是有 $W_A = W_B$, 这就表明 A 与 B 的行向量组等价.

若 $r = 0$, 则 $\text{rank } A = \text{rank } B = n$, 即 A 与 B 都是列满秩的, 故存在 m 阶可逆矩阵 P_1, P_2 使得

$$P_1 A = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}, \quad P_2 B = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix},$$

令 $P = P_2^{-1} P_1$, 则 P 是可逆矩阵, 且 $PA = B$ 由此易知, A 与 B 的行向量组等价.

注 由此可得: 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充

分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 使得 $PA = B$

这里, 我们给出必要性的另一证法. 注意到, 此时有 $\text{rank } A = \text{rank } B = r$, 不失一般性, 可设 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, B_1 均为行满秩的 $r \times n$ 矩阵, 因此存在 $(m-r) \times r$ 矩阵 C, D 使得 $A_2 = CA_1, B_2 = DB_1$. 因为 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 所以 $A_1x=0$ 与 $B_1x=0$ 也同解, 因而 $A_1x=0, B_1x=0$, 及 $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} x=0$ 都同解, 且 $\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = r$. 由此可知, 存在 r 阶方阵 Q 使得 $QA_1 = B_1$. 注意到 A_1 与 B_1 的行向量组都是线性无关的, 易知 Q 是可逆矩阵. 于是, 有

$$A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ C & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E_r & O \\ D & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ D & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ O \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ D & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & E_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ -C & E_{m-r} \end{pmatrix}, \text{ 则 } P \text{ 是 } m \text{ 阶可逆矩阵, 且 } PA = B$$

例 3.49 (中国科学院, 2006 年; 山东大学, 2015 年) 设有 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0, \end{cases}$$

其系数矩阵 A 划去第 j 列后的 $n-1$ 阶子式记为 $M_j (j = 1, 2, \dots, n)$. 试证明:

- (1) $(M_1, -M_2, \dots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解;
- (2) 如果 $\text{rank } A = n-1$, 那么方程组的解均为 $(M_1, -M_2, \dots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

证 (1) 对于 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 考虑 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

显然 $D = 0$ 另一方面, 将 D 按第一行展开得 $a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + a_{in}(-1)^{n-1}M_n = 0$. 因此

$$\eta_0 = (M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$$

是所述齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解

- (2) 因为 $\text{rank } A = n-1$, 所以 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式 $M_j \neq 0$, 即 $\eta_0 \neq 0$, 且齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系含 $n - \text{rank } A = 1$ 个解向量. 因此, $Ax = 0$ 的任一解均为 η_0 的倍数.

例 3.50 设 A, B 都是数域 F 上的 $(n-1) \times n$ 矩阵, 且都是行满秩的. 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 用 a_i 表示 A 中划去第 i 列所得的 $n-1$ 阶子式, b_i 表示 B 中划去第 i 列所得的 $n-1$ 阶子式. 又设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 求证: n 维向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的对应分量成比例.

证 记 $\alpha = (a_1, -a_2, \cdots, (-1)^{n-1}a_n)$, $\beta = (b_1, -b_2, \cdots, (-1)^{n-1}b_n)$, 因为 $\text{rank } A = \text{rank } B = n-1$, 所以 A 与 B 中都必存在一个 $n-1$ 阶子式非零, 故 $\alpha \neq 0$, 且 $\beta \neq 0$. 设 W 是 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的共同的解空间, 则 $\dim W = n - \text{rank } A = 1$. 又易知 $\alpha, \beta \in W$ (详见上一例的解答), 所以 α, β 是线性相关的. 于是, 存在 $k \in F$, 使得 $\alpha = k\beta$, 即 α 与 β 的对应分量成比例.

例 3.51 (南开大学, 2004 年) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

的行向量组是线性方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解. 令 M_i 表示 A 中划掉第 i 列的 $n-1$ 阶行列式 ($i = 1, 2, \cdots, n$)

- (1) 证明: $\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 0 \Leftrightarrow A$ 的行向量组不是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的基础解系;

- (2) 令 $\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 1$, 求 M_i

解 (1) 记 n 维行向量 $\xi = (1, 1, \cdots, 1)_{1 \times n}$, A 的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$. 又设

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ A \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 都是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解, 而 ξ 不是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解, 所以 ξ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示, 因此 $\text{rank } B = 1 + \text{rank } A$. 于是

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 0 \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow \text{rank} B < n \Leftrightarrow \text{rank} A < n - 1,$$

这又等价于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性相关, 因而不是 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ 的基础解系.

(2) 据题设 $\sum_{i=1}^n (-1)^i M_i = 1$, 所以

$$|B| = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} M_i = -1.$$

设 n 维向量 $\mathbf{b}^T = (n, 0, \dots, 0)_{1 \times n}$, 易知 $B\xi^T = \mathbf{b}$ 因为 B 可逆, 所以 $B^{-1}\mathbf{b} = \xi^T$, 即 $B^*\mathbf{b} = -\xi^T$

注意到 B^* 第一列的元素即 B 的第一行元素的代数余子式, 比较 $B^*\mathbf{b} = -\xi^T$ 的每一行, 得 $n(-1)^{1+i}M_i = -1$, 即

$$M_i = \frac{(-1)^i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

例 3.52 (北京大学, 1997 年; 武汉大学, 2009 年; 华南理工大学, 2011 年) 设 A, B 是数域 P 上的 n 阶方阵, X 是未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 所构成的 $n \times 1$ 矩阵. 已知齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 分别有 l, m 个线性无关的解向量, 这里 $l \geq 0, m \geq 0$ 证明:

(1) $(AB)X = \mathbf{0}$ 至少有 $\max(l, m)$ 个线性无关的解向量;

(2) 如果 $l+m > n$, 那么 $(A+B)X = \mathbf{0}$ 必有非零解;

(3) 如果 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 无公共的非零解向量, 且 $l+m = n$, 那么 P^n 中任一向量 α 都可唯一地表示成 $\alpha = \beta + \gamma$, 这里 β, γ 分别是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的解向量.

证 (1) 由题设 $l \leq n - \text{rank} A, m \leq n - \text{rank} B$, 而 $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank} A, \text{rank} B)$, 所以

$$n - \text{rank}(AB) \geq \max(n - \text{rank} A, n - \text{rank} B) \geq \max(l, m).$$

另一方面, 方程组 $(AB)X = \mathbf{0}$ 有 $n - \text{rank}(AB)$ 个线性无关的解向量. 故所证结论成立

(2) 因 $l+m > n$, 所以 $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank} A + \text{rank} B \leq (n-l) + (n-m) < n$, 因此齐次方程组 $(A+B)X = \mathbf{0}$ 必有非零解.

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 分别是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的线性无关的解, 又设

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_l \alpha_l + \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2 + \dots + \mu_m \beta_m = \mathbf{0},$$

则

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_l \alpha_l = -\mu_1 \beta_1 - \mu_2 \beta_2 - \cdots - \mu_m \beta_m$$

是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的公共解. 由题设, 得

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_l \alpha_l = \mathbf{0}, \quad \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2 + \cdots + \mu_m \beta_m = \mathbf{0},$$

所以

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_l = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m = 0.$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关. 又 $l+m=n$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 P^n 的一个基, 对于 P^n 中的任一向量 α , 都可由这个基线性表示, 设为

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_l \alpha_l + t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 + \cdots + t_m \beta_m,$$

令

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_l \alpha_l, \quad \gamma = t_1 \beta_1 + t_2 \beta_2 + \cdots + t_m \beta_m,$$

则 $\alpha = \beta + \gamma$, 且 β, γ 分别是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的解向量.

下证唯一性. 设 $\alpha = \beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$, 其中 β_i, γ_i 分别是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的解 ($i = 1, 2$), 则 $\beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$ 是 $AX = \mathbf{0}$ 和 $BX = \mathbf{0}$ 的公共解, 因而 $\beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = \mathbf{0}$, 故 $\beta_1 = \beta_2, \gamma_2 = \gamma_1$

例 3.53 (北京大学, 2005 年) 设数域 K 上的 n 阶方阵 A 的 (i, j) 元为 $a_i - b_j$

(1) 求 $|A|$

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$, 求齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间的维数和一个基

解 (1) 显然, 当 $n=1$ 时, $|A| = a_1 - b_1$. 当 $n=2$ 时, 有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2).$$

当 $n > 2$ 时, 注意到矩阵 A 可表示成两个 n 阶矩阵的乘积 $A = BC$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}||\mathbf{C}| = 0$

(2) 设 W 表示方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的解空间. 分为两种情形考虑:

当 $n=2$ 时, 由于 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 所以 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 只有零解, 即 $W = \{\mathbf{0}\}$, 故 $\dim W=0$, W 不存在基.
 当 $n > 2$ 时, 因为 $\text{rank } A \leq \text{rank } B \leq 2$, 且 A 的左上角的二阶子式 $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \neq 0$, 所以 $\text{rank } A = 2$, 因此 $\dim W = n - 2$. 此时, 显然有 $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 的解空间 $W_1 \subseteq W$, 且 $\dim W_1 = n - 2$, 这表明 $W_1 = W$, 故只需解方程组 $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 即可. 对矩阵 C 施行初等行变换, 有

$$\mathbf{C} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b_2 - b_3}{b_2 - b_1} & \cdots & \frac{b_2 - b_n}{b_2 - b_1} \\ 0 & 1 & \frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1} & \cdots & \frac{b_n - b_1}{b_2 - b_1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可解得 $\mathbf{C}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系亦即 W 的一个基为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_3 &= \left(\frac{b_3 - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_3}{b_2 - b_1}, 1, 0, \cdots, 0 \right)^T, \\ \boldsymbol{\eta}_4 &= \left(\frac{b_4 - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_4}{b_2 - b_1}, 0, 1, \cdots, 0 \right)^T, \\ \boldsymbol{\eta}_n &= \left(\frac{b_n - b_2}{b_2 - b_1}, \frac{b_1 - b_n}{b_2 - b_1}, 0, \cdots, 0, 1 \right)^T \end{aligned}$$

注 当 $n>2$ 时, 也可直接利用 Gauss 消元法求得方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

3.4 非齐次线性方程组

基本理论与要点提示

3.4.1 几个相关命题的等价性

对于数域 K 上的 n 元非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 或 $\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j = \beta$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是系数矩阵 A 的列向量. 显然, 以下几种说法是等价的:

- (1) 方程组 $Ax = \beta$ 有解;
- (2) 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- (3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 等价;
- (4) $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$
- (5) $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$
- (6) $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$
- (7) $\text{rank } A = \text{rank}(A, \beta)$

3.4.2 非齐次线性方程组有解的条件

非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解的充分必要条件是 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta)$. 确切地说, 当 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta) = n$ 时, 方程组有唯一解; 当 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta) < n$ 时, 方程组有无穷多个解; 当 $\text{rank} A \neq \text{rank}(A, \beta)$ 时, 方程组无解.

相应地, 当 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta) = n$ 时, β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表达式唯一; 当 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta) < n$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 但表达式不唯一; 当 $\text{rank} A \neq \text{rank}(A, \beta)$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

3.4.3 非齐次线性方程组的解的结构

- (1) 将方程组 $Ax = \beta$ 的常数项 $i\beta$ 换为 0 得到 $Ax = 0$, 称之为 $Ax = \beta$ 的导出组;
- (2) 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为方程组 $Ax = \beta$ 的导出组的一个基础解系, 则方程组的通解为

$$x = \eta_0 + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r},$$

其中 $r = \text{rank} A$, η_0 为方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解, 而 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意常数.

典型问题解析

例 3.54 (中国科学技术大学, 2010 年) 求如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 方程组的通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

例 3.55 (武汉大学, 2013 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + tz = -1, \\ 7x - 2z = -1 \end{cases}$$

的 3 个互异的解向量

(1) 试求参数 t 的值;

(2) 证明: $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关.

解 (1) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组的互不相同的解, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 与 $\alpha_1 - \alpha_3$ 都是对应的导出组的非零解, 其系数矩阵的行列式 $|A| = 0$ 易知 $|A| = -21(t+1)$, 解得 $t = -1$

(2) 当 $t = -1$ 时, 对导出组的系数矩阵 A 作初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 7r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 21 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见, $\text{rank} A = 2$, 其基础解系只含 $3 - 2 = 1$ 个非零解, 因此 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性相关.

例 3.56 (数学一, 2009 年) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解 (1) 对矩阵 (A, ξ_1) 施行初等行变换, 得

$$(A, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\frac{1}{2} - 1 \\ -1 & 1 & 1\frac{1}{2}\frac{1}{2}1 \\ 0 & -4 & -2\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0\frac{1}{2}0 \end{pmatrix},$$

由此可解得 $\xi_2 = (-\frac{1}{2} + \frac{k}{2}, \frac{1}{2} - \frac{k}{2}, k)^T$, 其中 k 为任意常数

再对矩阵 (A^2, ξ_1) 施行初等行变换, 得

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0:-1 \\ -2 & -2 & 0:1 \\ 4 & 4 & 0:-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0:-1 \\ 0 & 0 & 0:0 \\ 0 & 0 & 0:0 \end{pmatrix},$$

故可解得 $\xi_3 = (-\frac{1}{2} - a, a, b)^T$, 其中 a, b 为任意常数.

(2) 由 (1) 的结果, 有

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} + \frac{k}{2} & -\frac{1}{2} - a \\ & 1 & \frac{1}{2} - \frac{k}{2} \\ & & -2 & k & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

例 3.57 (北京师范大学, 2006 年) 当 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 = 1, \\ ax_1 + (2b+1)x_2 + 3x_3 = 1, \\ ax_1 + (b+1)x_2 + (b+4)x_3 = 2b+1. \end{cases}$$

有解? 并求解.

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} a & b+1 & 2 & \vdots & 1 \\ a & 2b+1 & 3 & \vdots & 1 \\ a & b+1 & b+4 & \vdots & 2b+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & b & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & b+2 & \vdots & 2b \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a \neq 0, b \neq 0, b \neq -2$ 时, 方程组有唯一解 $\left(\frac{4-b}{a(b+2)}, -\frac{2}{b+2}, \frac{2b}{b+2}\right)^T$

(2) 当 $b=-2$ 时, 方程组无解;

(3) 当 $b=0$ 时, 方程组有无穷多解, 其通解为 $(0, 1, 0)^T + k(1, -a, 0)^T$, k 为任意常数;

(4) 当 $a=0, b \neq 0, b \neq -2$ 时, 方程组的增广矩阵可进一步化为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b-4 \end{pmatrix}.$$

若 $b \neq 4$, 则方程组无解; 若 $b=4$, 则方程组有无穷多解, 其通解为 $(0, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})^T + k(1, 0, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

例 3.58 (武汉大学, 2011 年; 数学一, 2008 年) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

解 (I) 利用归纳法或降阶法易证, 留给读者作为练习.

(II) 当 $a \neq 0$ 时, 方程组的系数行列式 $|A| \neq 0$, 故方程组有唯一解. 用 b 替换 $|A|$ 的第一列, 得行列式 $D_1 = na^{n-1}$. 根据 Cramer 法则, $x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{n}{(n+1)a}$.

(III) 当 $a = 0$ 时, 方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

此时有无穷多解, 其通解为 $x = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$, 其中 k 为任意常数

例 3.59 (西南大学, 2007 年) 问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \lambda^3 \end{cases}$$

没有解? 有唯一解? 有无穷多解?

解 线性方程组的增广矩阵为

$$(A, \beta) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

系数矩阵的行列式 $|A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)$

- (1) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, $\text{rank } A = \text{rank}(A, \beta) = 4$, 方程组有唯一解.
- (2) 当 $\lambda = 1$ 时, $\text{rank } A = \text{rank}(A, \beta) = 1 < 4$, 方程组有无穷多解
- (3) 当 $\lambda = -3$ 时, $\text{rank } A = 3$, 而 $\text{rank}(A, \beta) = 4$, 所以方程组没有解.

例 3.60 (南京大学,2016 年; 南京理工大学,2009 年) 讨论当 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 无解? 并求出有解时的一般解

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换, 化为简化的行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b-2 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 2$ 时, 方程组无解;

(2) 当 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时, 方程组有解. 此时, 易知方程组的一般解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

例 3.61 (北京邮电大学,2007 年; 北京科技大学,2010 年) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示 19 并写出线性表示式

解 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & +x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 & +2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 & = b+3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 & = 5. \end{cases} \quad (1)$$

对上述方程组的增广矩阵施行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & \vdots & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

易见, 当 $a=-1, b \neq 0$ 时, $\text{rank} B = 3 \neq 2 = \text{rank} A$ (A 为方程组①的系数矩阵), 方程组①无解; 当 $a \neq -1$, b 任意时, $\text{rank} A = \text{rank} B = 4$, 方程组①有唯一解

$$x_1 = -\frac{2b}{a+1}, x_2 = \frac{a+b+1}{a+1}, x_3 = \frac{b}{a+1}, x_4 = 0;$$

当 $a=-1, b=0$ 时, $\text{rank} A = \text{rank} B = 2$, 方程组①有无穷多解, 其通解为

$$\mathbf{x} = (0, 1, 0, 0)^T + k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(1, -2, 0, 1)^T$$

其中 k_1, k_2 为任意常数. 于是, 有

(1) 当 $a = -1, b \neq 0$ 时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

(2) 当 $a \neq -1$, b 任意时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一的线性表示式, 且

$$\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0\alpha_4;$$

(3) 当 $a = -1, b = 0$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 表示式有无穷多个, 且

$$\beta = (-2k_1 + k_2)\alpha_1 + (1 + k_1 - 2k_2)\alpha_2 + k_1\alpha_3 + k_2\alpha_4$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例 3.62 (南开大学, 2012 年) 试求出线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3 \end{cases}$$

存在解的充分必要条件, 并在有解时求出其通解, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为参数.

解 方程组的增广矩阵 A 的行列式是 Vandermonde 行列式:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (a_i - a_j).$$

若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不等, 则 $\det A \neq 0, \text{rank } A = 4$. 但方程组系数矩阵的秩 $\leq 3 < \text{rank } A$, 此时方程组无解. 因此, 方程组有解的必要条件是 a_1, a_2, a_3, a_4 至少有两个相等

(1) 当 $a_1 \neq a_2 \neq a_3 = a_4$ 时 (不考虑对称情形, 下同), 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3. \end{cases}$$

易知, 其系数行列式不等于零. 利用 Cramer 法则, 方程组的唯一解为 (见例 3.26)

$$x_1 = a_1a_2a_3, \quad x_2 = -a_1a_2 - a_3a_1 - a_2a_3, \quad x_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

(2) 当 $a_1 \neq a_2 = a_3 = a_4$ 时, 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3. \end{cases}$$

此时, 容易求得其通解为

$$(x_1, x_2, x_3) = k(a_1 a_2, -a_1 - a_2, 1) + (-a_1^2 a_2 - a_1 a_2^2, a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2, 0),$$

其中 k 为任意常数.

(3) 当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ 时, 同解方程组为

$$x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3.$$

此时, 容易求得其通解为

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1(-a_1, 1, 0) + k_2(-a_1^2, 0, 1) + (-a_1^3, 0, 0),$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

综上所述, 方程组有解当且仅当 a_1, a_2, a_3, a_4 至少有两个相等, 且 (1)(2)(3) 分别给出了方程组有解时的唯一解或通解.

例 3.63 (上海交通大学, 2005 年) 下面的 n 元线性方程组何时无解, 有唯一解, 有无穷多组解? 有解时, 求出解.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

解 将原方程组表为矩阵形式: $Ax = b$, 易知 $|A| = (a + (n-1))(a-1)^{n-1}$. 可见, 需讨论 a 是否取值 1 或 $-(n-1)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, 则 $\text{rank} A = \text{rank}(A, b) = 1$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$x = (a_1, 0, \cdots, 0) + k_1(1, -1, 0, \cdots, 0) + k_2(1, 0, -1, \cdots, 0) + \cdots + k_{n-1}(1, 0, \cdots, 0, -1),$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数; 若 $a_i \neq a_1 (i \neq 1)$, 则 $\text{rank} A < \text{rank}(A, b)$, 方程组无解.

(2) 当 $a \neq -(n-1)$ 时, 对方程组的增广矩阵 (A, b) 作初等行变换, 先把第 2 至 n 行都加到第 1 行, 再把第 1 行乘 $\frac{1}{a+n-1}$, 然后把第 2 至 n 行都减去第 1 行, 得

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) &\rightarrow \begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ 1 & a & \cdots & 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & a_n \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a+n-1} \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 & a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & a_n - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{a+n-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

显然, 当 $a \neq 1$ 时, $\text{rank} A = \text{rank}(A, \mathbf{b}) = n$, 此时方程组有唯一解. 易知

$$x_i = \frac{a_i}{a-1} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{(a-1)(a+n-1)} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

(3) 当 $a = -(n-1)$ 时, 若 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, 则 $\text{rank} A < \text{rank}(A, \mathbf{b})$, 方程组无解; 若 $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, 则 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \mathbf{b}) = n-1$, 方程组有无穷多解, 此时不难求得其通解为

$$x = \left(k - \frac{a_1}{n}, k - \frac{a_2}{n}, \cdots, k - \frac{a_n}{n} \right)$$

其中 k 为任意常数.

例 3.64 (华东师范大学, 2005 年) 讨论 $b_1, b_2, \cdots, b_n (n \geq 2)$ 满足什么条件时下列方程组有解, 并求解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1, \\ x_2 + x_3 = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1}, \\ x_n + x_1 = b_n. \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵 $(A, \mathbf{b})$ 施行初等行变换, 化为简化行阶梯形矩阵:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & b_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \vdots & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (-1)^{n-2} & \vdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 + (-1)^{n-1} & \vdots & c_n \end{pmatrix},$$

其中 $c_k = b_{k-1} - b_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2}b_1 + (-1)^{k-1}b_n, k = 2, 3, \cdots, n$.

当 n 为奇数时, $1 + (-1)^{n-1} = 2$, 系数矩阵的行列式 $\det A \neq 0$, 方程组有唯一解

$$\mathbf{x} = \left(b_n - \frac{c_n}{2}, c_2 + \frac{c_n}{2}, c_3 - \frac{c_n}{2}, \cdots, c_{n-1} + \frac{c_n}{2}, \frac{c_n}{2} \right)^T$$

当 n 为偶数时, $1 + (-1)^{n-1} = 0, \text{rank } A = n - 1$, 所以方程组有解的充分必要条件是

$$\text{rank}(A, \mathbf{b}) = n - 1 \Leftrightarrow c_n = 0, \text{即 } b_1 - b_2 + \cdots + b_{n-1} - b_n = 0.$$

此时, 方程组的通解为

$$\mathbf{x} = (b_n, c_2, \cdots, c_{n-1}, 0)^T + k(1, -1, \cdots, 1, -1)^T,$$

其中 k 为任意常数.

例 3.65 (南京大学, 2011 年) 设 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关, 后 $n-1$ 个列向量线性无关, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

(1) 证明: 方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \beta$ 必有无穷多解;

(2) 求方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \beta$ 的通解.

解 (1) 由于 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关. 又 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性相关, 所以 α_1 可由 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 唯一地线性表示, 即存在唯一的一组数 $k_2, \cdots, k_{n-1}$, 使得

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1} = k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1} + 0\alpha_n. \quad (1)$$

这就表明 $\text{rank } A = n-1$. 此外, 注意到 $|\beta|$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 可见

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \beta) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta) = \text{rank}(\alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \text{rank } \mathbf{A}.$$

因此, 方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \beta$ 必有无穷多解.

(2) 根据 (1) 的结论, 齐次方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 的基础解系只包含一个解. 又由①式可得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \begin{pmatrix} -1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{或} \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

故向量 $(-1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0)^T$ 为齐次方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的基础解系. 再由

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

知, $(1, 1, \dots, 1)^T$ 为非齐次方程组 $AX = \beta$ 的一个特解. 于是 $AX = \beta$ 的通解为

$$X = (1, 1, \dots, 1)^T + c(-1, k_2, \dots, k_{n-1}, 0)^T,$$

其中 c 为任意常数.

例 3.66 (南京理工大学, 2003 年) 设 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in P^{n \times n}$, 线性方程组 $AX = b$ 有通解 $X = \eta_0 + k_1 \xi_1 + \dots + k_s \xi_s$, 其中 $\eta_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$, $\xi_i = \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T}_{i \uparrow}$, $i = 1, 2, \dots, s$. 又设 $B = (nA_n, (n-1)A_{n-1}, \dots, 2A_2, A_1)$, 求 $BX = b$ 的通解.

解 据题设有 $B = AC$, 其中

$$C = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \ddots & & \\ n & & & \end{pmatrix}.$$

易知 C 可逆, 且

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{n} \\ & & \ddots & \\ & \frac{1}{2} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

所以 $s = n - \text{rank} A = n - \text{rank} B$, 且 $AX = b \Leftrightarrow BC^{-1}X = b$, 及 $AX = \mathbf{0} \Leftrightarrow BC^{-1}X = \mathbf{0}$. 又 $C^{-1}\xi_1, C^{-1}\xi_2, \dots, C^{-1}\xi_s$ 是线性无关的, 于是 $BX=b$ 的通解为

$$\boldsymbol{X} = C^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 + k_1 C^{-1}\boldsymbol{\xi}_1 + k_2 C^{-1}\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s C^{-1}\boldsymbol{\xi}_s$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s \in P, C^{-1}\boldsymbol{\eta}_0 = \left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{2}, 1\right)^T$, 而

$$C^{-1}\boldsymbol{\xi}_i = \left(0, \cdots, 0, \frac{1}{i}, \cdots, \frac{1}{2}, 1\right)^T, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

例 3.67 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$, 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_5$ 的通解为 $k(2, 0, -3, 1)^T + (1, 2, -1, 0)^T$

其中 $k \in \mathbb{R}$. 试问: (1) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示? (2) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示? 若可以表示, 则写出一般表示式; 若不能表示, 则说明理由.

解 由题设, 知 $\boldsymbol{\alpha}_5 = (2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - (3k+1)\boldsymbol{\alpha}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_4$

(1) 可以表示. 这只需在上式中令 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的系数 $2k+1=0$ 即可. 此时, $k = -\frac{1}{2}$, 且有

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3 + \frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_5.$$

(2) 不能表示. 根据所给通解的结构, 知 $\text{rank } \boldsymbol{A}=3$, 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3, 且 $2\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_4 = -2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$

若 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示, 设为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (k_1 - 2k_4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_3 + 3k_4)\boldsymbol{\alpha}_3$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 因而 $\text{rank } (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \leq 2$, 矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

例 3.68 (华南理工大学, 2000 年) 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (\text{I})$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩. 证明方程组 (I) 有解. 问逆命题是否成立? 为什么?

解 记向量 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 则方程组 (I) 的增广矩阵为 $(A, \mathbf{b})$. 因为

$$\text{rank } A \leq \text{rank}(A, \mathbf{b}) \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{pmatrix} = \text{rank } B = \text{rank } A.$$

于是有 $\text{rank } A = \text{rank}(A, \mathbf{b})$, 所以方程组 (I) 有解.

逆命题不成立. 例如, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$ 有解, 这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知 $\text{rank } A = 2, \text{rank } B = 3$, 所以 $\text{rank } A \neq \text{rank } B$.

例 3.69 (武汉大学, 2005 年) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 是 m 维列向量, 证明下述命题相互等价:

(1) 线性方程组 $Ax = \beta$ 有解;

(2) 齐次方程组 $A^T x = 0$ 的任一解 $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 必满足 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_m b_m = 0$

(3) 线性方程组 $(A^T)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解, 其中 0 是 n 维零向量

证 采用循环证法: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$. 设 $A\xi = \beta, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, 且 $A^T x = 0$, 则 $\beta^T x = \xi^T A^T x = 0$, 即

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_m b_m = 0.$$

$(2) \Rightarrow (3)$. 若方程组 $A^T x = 0$ 的任一解 x 都使得 $\beta^T x = 0$, 则 $A^T x = 0$ 与 $(A^T)x = 0$ 同解, 因而方程组 $(A^T)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解.

$(3) \Rightarrow (1)$. 若线性方程组 $(A^T)x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $\text{rank} \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} A^T & 0 \end{pmatrix}$, 即

$$\text{rank}(A, \beta) < \text{rank} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} + \text{rank} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \text{rank} A + 1,$$

故 $\text{rank} A \leq \text{rank}(A, \beta) \leq \text{rank} A$, 于是有 $\text{rank} A = \text{rank}(A, \beta)$, 方程组 $Ax = \beta$ 有解.

例 3.70 (北京师范大学, 1998 年) 证明: 含有 n 个未知量 $n+1$ 个方程的线性方程组

[illegible]

有解的必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

这个条件充分吗？若这个条件充分，则给出一个证明；若你认为不是充分条件，请举出反例

解 据题设方程组有解, 所以其系数矩阵 A 的秩 ($\leq n$) 等于增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩, 于是有 $\det \bar{A} = 0$, 即条件①成立. 反之, 条件①不是充分的, 例如: 对于 $n = 2$ 时的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3, \end{cases}$$

显然, 条件①成立, 但方程组无解

例 3.71 (北京大学, 2001 年) 设 ω 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的本原 n 次单位根 (即 $\omega^n = 1$, 而当 $0 < t < n$ 时, $\omega^t \neq 1$), s, b 都是正整数, 且 $s < n$. 令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \omega^b & \omega^{2b} & \dots & \omega^{(n-1)b} \\ 1 & \omega^{b+1} & \omega^{2(b+1)} & \dots & \omega^{(n-1)(b+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{b+s-1} & \omega^{2(b+s-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(b+s-1)} \end{pmatrix},$$

任取 $\beta \in \mathbb{C}^s$, 判断线性方程组 $AX = \beta$ 有无解? 有多少解? 写出理由.

解 显然, A 的前 s 列所构成的子式 D 是一个 Vandermonde 行列式, 所以

$$D = \prod_{0 \leq j < i \leq s-1} (\omega^{b+i} - \omega^{b+j}).$$

据题设条件可知 $\omega^b, \omega^{b+1}, \dots, \omega^{b+s-1}$ 是 s 个两两不等的复数, 所以 $D \neq 0$. 因此, $\text{rank} A = s$, 且 $\forall \beta \in \mathbb{C}^s, \text{rank}(A, \beta) = s < n$. 这就表明, n 元线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 且有无穷多解.

例 3.72 (北京理工大学, 2003 年) 设复数 ω 满足 $\omega^n = 1$, 但对 $0 < k < n, \omega^k \neq 1$ 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^t & \omega^{2t} & \dots & \omega^{(n-1)t} \\ 1 & \omega^{t+1} & \omega^{2(t+1)} & \dots & \omega^{(n-1)(t+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{t+s-1} & \omega^{2(t+s-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(t+s-1)} \end{pmatrix},$$

这里 s, t 都是正整数, 且 $s < n$. 任取 $s \times 1$ 复矩阵 b 和 $n \times 1$ 复矩阵 c , 分别讨论线性方程组 $AX = b$ 和 $A^T Y = c$ 的解的情况

解 根据上一题的解答, $\text{rank} A = s$, 且 $\forall b \in \mathbb{C}^s, \text{rank}(A, b) = s$. 所以方程组 $AX = b$ 有解, 且有无穷多解.

另一方面, $\text{rank} A^T = s$. 设 $W \subset \mathbb{C}^n$ 是由 A^T 的列向量组所张成的子空间, $\forall c \in \mathbb{C}^n$ 若 $c \in W$, 则 $\text{rank}(A^T, c) = \text{rank} A^T = s$, 所以线性方程组 $A^T Y = c$ 有唯一解; 若 $c \notin W$, 则 $\text{rank} A^T < \text{rank}(A^T, c)$, 此时方程组 $A^T Y = c$ 无解.

例 3.73 (北京大学, 1991 年) 已知 $D = |a_{ij}|_{n \times n} \neq 0$. 试证明: 线性方程组

(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = d. \end{cases}$$

与

(II)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = c_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d. \end{cases}$$

或都有唯一解, 或都没有解

证 令 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $\text{rank} \mathbf{A} = n$. 又记 $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \boldsymbol{\gamma} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, 则方程组 (I) 和 (II) 的增广矩阵分别为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}^T & d \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\beta}^T & d \end{pmatrix}.$$

注意到 (I) 和 (II) 的系数矩阵的秩均等于 n , 且 $\mathbf{B} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{0} & d - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, 于是有:

若 $d = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\beta}$, 则 $\text{rank} \mathbf{B} = \text{rank}(\mathbf{B}^T) = n$, 此时方程组 (I) 和 (II) 都有唯一解;

若 $d \neq \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\beta}$, 则 $\text{rank} \mathbf{B} = \text{rank}(\mathbf{B}^T) = n + 1$, 此时方程组 (I) 和 (II) 都没有解

例 3.74 (重庆大学,2005 年) 设 A 为 n 阶方阵 $A^* = (A_{ij})$ 为 A 的伴随矩阵且 $A_{11} \neq 0$ 又设 $b \neq 0$ 为 n 维列向量. 证明: $AX = b$ 有无穷多个解 $\Leftrightarrow b$ 是 $A^*X = 0$ 的解.

证 $(\Rightarrow)$ 设 $AX = b$ 有无穷多个解, 则 $\text{rank } A = \text{rank}(A, b) < n$, 所以 $|A| = 0$ 因此, $A^*b = A^*AX = |A|X = 0$, 即 b 是 $A^*X = 0$ 的解.

$(\Leftarrow)$ 设 $b \neq 0$ 是 $A^*X = 0$ 的解, 则 $\text{rank } A^* < n$. 又 $A^* \neq O$, 所以 $\text{rank } A^* = 1$, 从而有 $\text{rank } A = n - 1$, 且 $A^*A = |A|E = O$, 即 A 的列向量组是 $A^*X = 0$ 的解. 又 $A^*X = 0$ 的基础解系含 $n-1$ 个解, 所以 b 可由 A 的列向量组线性表示, 这就表明 $\text{rank } A = \text{rank}(A, b) < n$, 于是 $AX = b$ 有无穷多个解.

例 3.75 (四川大学,2000 年) 设 A 是一个 n 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 且存在 n 维非零列向量 α 满足 $A\alpha = 0$ 证明: 非齐次线性方程组 $A^*X = \alpha$ 有解 $\Leftrightarrow \text{rank } A = n - 1$

证 因为齐次方程组 $AX = 0$ 有非零解 α . 所以 $\text{rank } A < n$, 从而 $\text{rank } A^* \leq 1$

$(\Rightarrow)$ 设 $A^*X = \alpha$ 有解, 则 $A^* \neq O$, 故 $\text{rank } A^* = 1$. 因此 $\text{rank } A = n - 1$

$(\Leftarrow)$ 设 $\text{rank } A = n - 1$, 则 $\text{rank } A^* = 1$, 且 $AA^* = |A|E = O$, 即 A^* 的列向量组是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解. 又 $A\alpha = 0$, 所以 α 构成 $AX = 0$ 的基础解系, 这就表明 A^* 的列向量组可由 α 线性表示, 于是 $A^*X = \alpha$ 有解.

例 3.76 (华东师范大学,2005 年) 设 γ_0 是数域 K 上非齐次线性方程组 $AX = B$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是该方程组的导出组的基础解系, 则以下命题中错误的是 ().

(A) $\gamma_0, \gamma_0 - \eta_1, \gamma_0 - \eta_2, \dots, \gamma_0 - \eta_s$ 是 $AX=B$ 的一组线性无关解向量;

(B) $AX = B$ 的每个解均可表为 $\gamma_0, \eta_1, 2\eta_2, \dots, s\eta_s$ 的线性组合;

(C) $2\gamma_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$ 是 $AX = B$ 的解;

(D) $AX = B$ 的每个解均可表为 $\gamma_0, \gamma_0 + \eta_1, \gamma_0 + \eta_2, \dots, \gamma_0 + \eta_s$ 的线性组合.

解 选项 (A)(B) 显然正确. 选项 (D) 也正确, 这是因为 $AX=B$ 的每个解均可表为

$$X = \gamma_0 + \sum_{j=1}^s k_j \eta_j = (1 - \sum_{j=1}^s k_j) \gamma_0 + \sum_{j=1}^s k_j (\gamma_0 + \eta_j).$$

故只有选项 (C) 是错误的. 事实上, 因为 $2\gamma_0$ 不是 $AX = B$ 的特解, 而 $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$ 是导出组 $AX = 0$ 的解, 所以 $2\gamma_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$ 不是 $AX = B$ 的解.

例 3.77 (上海大学, 2005 年) 设 β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系. 求证:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \beta$ 线性无关;
 (2) $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_{n-r}, \beta$ 也线性无关.

证 (1) 据题设有 $A\beta = b \neq 0$, 且 $A\alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, n-r$. 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r} + k_0\beta = 0.$$

对上式两边左乘 A , 得

$$\sum_{j=1}^{n-r} k_j A\alpha_j + k_0 A\beta = 0, \quad \text{即} \quad k_0 b = 0.$$

因为 $b \neq 0$, 所以 $k_0 = 0$, 从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r} = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 线性无关, 可得 $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0$. 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, \beta$ 线性无关.

(2) 设

$$k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_{n-r}(\beta + \alpha_{n-r}) + k_0\beta = 0,$$

则

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r})\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r} = 0.$$

由 (1) 已证得的结论 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 是线性无关的, 所以

$$k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = 0, \quad k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0.$$

从而 $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = k_0 = 0$ 因此 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_{n-r}, \beta$ 线性无关.

例 3.78 (武汉大学, 2015 年) 设 A 为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵, b 为 F^m 中的非零列向量, $\text{rank } A = \text{rank}(A, b) = r < n$. 又设 S 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集合. 证明:

(1) S 中必存在 $n-r+1$ 个线性无关的向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$;

(2) $\beta \in S$ 的充分必要条件是存在 $k_i \in F (1 \leq i \leq n-r+1)$, $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i = 1$, 使得 $\beta = \sum_{i=1}^{n-r+1} k_i \eta_i$

证 (1) 因为 $\text{rank } A = \text{rank}(A, b) = r < n$, 所以非齐次方程组 $Ax = b$ 有解 η , 齐次方程组 $Ax = 0$ 有基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 容易证明:

$$\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_{n-r}$$

是方程组 $Ax=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 记这个向量组为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 即得所证.

(2) 充分性显然, 只证必要性. 设 $\beta \in S$, 由于

$$\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1, \dots, \eta_{n-r+1} - \eta_1$$

是线性无关的, 因而是 $Ax=0$ 的基础解系. 故有

$$\begin{aligned} \beta &= \eta_1 + k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1) + \dots + k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1} - \eta_1) \\ &= \left(1 - \sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\right) \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1} \\ &= k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1}, \end{aligned}$$

其中 $k_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n-r+1} k_i$, 因而 $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i = 1$.

例 3.79 (厦门大学, 2003 年) 设 A 是数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵, b 是 F 上的 m 维非零列向量, η 是线性方程组 $AX = b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 求证: $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_s$ 是 $AX = b$ 的全体解集合的一个极大线性无关组.

证 首先, $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_s$ 显然都是 $AX=b$ 的解. 其次, 设

$$k_0 \eta + k_1(\eta + \xi_1) + k_2(\eta + \xi_2) + \dots + k_s(\eta + \xi_s) = 0,$$

则有 $(\sum_{i=0}^s k_i) \eta + \sum_{i=1}^s k_i \xi_i = 0$. 两边左乘 A , 注意到 η 是 $AX=b$ 的解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的解, 那么 $(\sum_{i=0}^s k_i) b = 0$, $\sum_{i=0}^s k_i = 0$. 从而有 $\sum_{i=1}^s k_i \xi_i = 0$ 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性无关, 所以 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 进而 $k_0 = 0$ 因此 $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_s$ 线性无关.

另一方面, 若 γ 是 $Ax = b$ 的解, 则 $\gamma - \eta$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解, 所以存在 $k_i \in F, i = 1, 2, \dots, s$, 使得 $\gamma - \eta = \sum_{i=1}^s k_i \xi_i$, 于是

$$\gamma = \eta + \sum_{i=1}^s k_i \xi_i = \left(1 - \sum_{i=1}^s k_i\right) \eta + \sum_{i=1}^s k_i (\eta + \xi_i).$$

因此 $\eta, \eta + \xi_1, \eta + \xi_2, \dots, \eta + \xi_s$ 是 $AX=b$ 的解集合的一个极大无关组

例 3.80 (南京航空航天大学, 2016 年) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解

- (1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩为 2;
- (2) 求 a, b 的值;
- (3) 求方程组在超平面 $x_3 - x_4 = 0$ 上的模 (长度) 最小的特解

解 (1) 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组的三个线性无关的解, 则 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 是对应的齐次方程组 $Ax = 0$ 的两个解. 易证: $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 是线性无关的, 因此 $Ax = 0$ 的解空间的维数为 $4 - \text{rank} A \geq 2$, 即 $\text{rank} A \leq 2$. 又 A 中有二阶子式不为 0, 可知 $\text{rank} A \geq 2$. 所以 $\text{rank} A = 2$.

- (2) 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换, 得

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ a & 1 & 3 & b & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & \frac{1}{2} & 4-2a \end{pmatrix} = B.$$

因为方程组有解, $\text{rank} \bar{A} = \text{rank} A = 2$, 所以 $4-2a=0, 4a+b-5=0$. 解得 $a=2, b=-3$

- (3) 此时, 有 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, 可得原方程组的通解为

$$\begin{aligned} x &= (2, -3, 0, 0)^T + k_1(-2, 1, 1, 0)^T + k_2(4, -5, 0, 1)^T \\ &= (2 - 2k_1 + 4k_2, -3 + k_1 - 5k_2, k_1, k_2)^T, \end{aligned}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数. 因此, 方程组在超平面 $x_3 - x_4 = 0$ 上的解为

$$x = (2 + 2k_1, -3 - 4k_1, k_1, k_1)^T.$$

由于 $\|x\|^2 = 22k_1^2 + 32k_1 + 13$ 易知, 当 $k_1 = -\frac{8}{11}$ 时, 模 $|x|$ 取最小值. 此时, 方程组的解为

$$x = \left(\frac{6}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{8}{11} \right)^T$$

例 3.81 (南开大学, 2009 年) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为数域 P 上的 n 阶方阵, 满足条件 $b_{ij} = b^{i-j}a_{ij}$, 其中 b 为一非零常数. 作线性方程组 (I): $AX=C$ 及 (II): $BX=D$. 试证明方程组 (I) 对任何 $C \in P^{n \times 1}$ 有解当且仅当方程组 (II) 对任何 $D \in P^{n \times 1}$ 有解.

证 据题设易知 $HA = BH$, 其中 $H = \text{diag}(1, b, \dots, b^{n-1})$. 因为 H 是可逆矩阵, 所以 $\text{rank } A = \text{rank } B$.

如果方程组 (I) 对任何 $C \in P^{n \times 1}$ 有解, 那么取 $C = \varepsilon_i$ (单位矩阵 E 的第 i 列), 设 (I) 的解为 $X_i \in P^{n \times 1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 于是有

$$A(X_1, X_2, \dots, X_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = E.$$

因此 A 为可逆矩阵, 即 $\text{rank } A = \text{rank } B = n$. 此时, $\forall D \in P^{n \times 1}$, 有 $\text{rank}(B, D) = \text{rank } B = n$, 故方程组 (II) 有解.

同理可证, 若方程组 (II) 对任何 $D \in P^{n \times 1}$ 有解, 则方程组 (I) 对任何 $C \in P^{n \times 1}$ 也有解.

3.5 综合性问题

例 3.82 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3$), 则 3 条直线

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

相交于一点的充分必要条件是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

(C) $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2)$ (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关

解 记

$$\bar{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}.$$

所给 3 条直线相交于一点 $\Leftrightarrow$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1, \\ a_2x + b_2y = -c_2, \\ a_3x + b_3y = -c_3 \end{cases}$$

有唯一解 $\Leftrightarrow \text{rank} A = \text{rank} \bar{A} = 2$, 即 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 而 α_1, α_2 线性无关. 因此应选 (D).

选项 (A)(B) 显然不正确, 而 (C) 只是必要条件, 但不是充分条件 (因为秩可为 1 或 2).

例 3.83 (南京理工大学, 2010 年; 重庆大学, 2006 年) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

证明这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$

证 必要性. 设三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点 (x_0, y_0) , 则线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by + 3cz = 0, \\ bx + 2cy + 3az = 0, \\ cx + 2ay + 3bz = 0 \end{cases}$$

有非零解 $(x_0, y_0, 1)$, 其系数矩阵的行列式

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = -6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ &= -3(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0, \end{aligned}$$

但 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$, 故 $a+b+c=0$.

充分性. 由 $a+b+c=0$ 及上述证明可知, $|\mathbf{A}|=0$, 故向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2b \\ 2c \\ 2a \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3c \\ 3a \\ 3b \end{pmatrix}$$

线性相关, 而向量组 α_1, α_2 线性无关. 所以 α_3 可由 α_1, α_2 唯一地线性表示, 即线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by + 3c = 0, \\ bx + 2cy + 3a = 0, \\ cx + 2ay + 3b = 0 \end{cases}$$

有唯一解, 即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

例 3.84 设直线 L_1 与 L_2 的一般方程为

$$\begin{aligned} L_1 : & \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \\ L_2 : & \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (①)$$

②

请给出并证明 L_1 与 L_2 平行 (但不重合) 的充分必要条件

解 设 ξ_1 与 ξ_2 分别是直线 L_1 与 L_2 的方向向量, 令 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{Q}$ 分别为线性方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

的系数矩阵与增广矩阵, 则 $L_1 \parallel L_2$ 但不重合) $\Leftrightarrow \text{rank } P=2$ 且 $\text{rank } Q=3$. 兹证明如下:

必要性. 设 $L_1 \parallel L_2$ 但不重合), 则 $\xi_1 // \xi_2$, 且方程组③无解, $\text{rank } P < \text{rank } Q$. 注意到方程组①与②对应的齐次方程组的解空间分别是 $L(\xi_1)$ 与 $L(\xi_2)$, 所以方程组③对应的齐次方程组的解空间 $W = L(\xi_1) \cap L(\xi_2) = L(\xi_1)$. 因此, 有

$$\text{rank } P = 3 - \dim W = 3 - \dim L(\xi_1) = 2,$$

从而有 $\text{rank } Q=3$.

充分性. 设 $\text{rank } P=2, \text{rank } Q=3$, 则方程组③无解. 所以 L_1 与 L_2 无公共点. 又因为

$$\dim W = 3 - \text{rank } P = 1,$$

且 $W \subseteq L(\xi_1), W \subseteq L(\xi_2)$, 所以 $L(\xi_1) = W = L(\xi_2)$, 这表明 $\xi_1 // \xi_2$. 因此 $L_1 // L_2$ (但不重合).

例 3.85 (大连理工大学, 2007 年; 重庆大学, 2004 年) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为实数域上的矩阵, 证明:

- (1) 如果 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$, 那么 $\det A \neq 0$.
- (2) 如果 $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$, 那么 $\det A > 0$.

证 (1) 用反证法. 假设 $\det A=0$, 则齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

必有非零解 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. 设

$$|c_k| = \max \{|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|\},$$

则 $|c_k| \neq 0$ 将 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 代入原方程组, 其中第 k 个等式为

$$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots + a_{kk}c_k + \dots + a_{kn}c_n = 0,$$

即

$$a_{kk}c_k = -a_{k1}c_1 - \dots - a_{k,k-1}c_{k-1} - a_{k,k+1}c_{k+1} - \dots - a_{kn}c_n,$$

所以

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \left| \frac{c_j}{c_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.$$

此与题设不等式矛盾. 因此 $\det A \neq 0$.

(2) 将矩阵 A 的元素 (对角元除外) 都乘 t , 构造如下行列式:

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1,n-1} & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2,n-1} & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ta_{n-1,1} & ta_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & ta_{n-1n} \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & ta_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对任意 $t \in [0, 1]$, 显然有

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \sum_{j \neq i} |ta_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

所以 $f(t) \neq 0$ 参见第 (1) 题的结论).

此外, $f(t)$ 展开后是 t 的一个连续实函数, 且 $f(0) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} > 0$ 及 $f(1) = \det A$

若 $f(1) = \det A < 0$, 则由连续函数的介值定理知, 必存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(t_0) = 0$, 此与上面结论矛盾. 因此 $f(1) = \det A > 0$

例 3.86 (汕头大学, 2004 年) 设 A_1 为 $1 \times n$ 矩阵 $A_1 \neq O$ 如 $A_1 x = 0$ 有非零解, 取其中一个 α_1 , 令 $A_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1^T \end{pmatrix}$, 其中 α_1^T 表示 α_1 的转置. 如 $A_2 x = 0$ 有非零解, 再取其中一个 α_2 , 令 $A_3 = \begin{pmatrix} A_2 \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}$, 如此得 $A_1, A_2, \dots$, 直到 $A_r x = 0$ 只有零解为止. 问是否存在 A_1 , 使得 $A_1, A_2, \dots$ 为无穷序列? 为什么? 若序列有限, 可否确定 r 的上界? (若能确定, 则给出上界.)

解 若 A_1 为复数矩阵, 则存在 $A_1 \neq O$, 使得 $A_1, A_2, \dots$ 为无穷序列. 例如, 取 $1 \times n$ 矩阵 $A_1 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, 以及 $\alpha_1^T = \alpha_2^T = \dots = (1, 1, 0, \dots, 0)$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, 则 $A_1, A_2, \dots$ 是满足所述条件的无穷序列.

若 A_1 为实数矩阵, 则不存在 $A_1 \neq O$, 使得 $A_1, A_2, \dots$ 为无穷序列. 此时, r 的上界为 n . 下面用归纳法证明: 对任意正整数 $r \leq n$, 且 $\text{rank } A_r = r$. 事实上, 当 $r = 1$ 时, 显然 $\text{rank } A_1 = 1$ 假设 $\text{rank } A_r = r < n$, 即 $\text{rank}(A_r^T) = r$, 则 A_r^T 的列向量组 $\alpha_0 = A_1^T, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性无关. 设 α_r 是 $A_r x = 0$ 的非零解, 即 $A_r \alpha_r = 0$, 则根据 A_r 的构造可知 $\alpha_j^T \alpha_r = \alpha_r^T \alpha_j = 0, j = 0, 1, \dots, r-1$. 考虑

$$k_0 \alpha_0 + k_1 \alpha_1 + \dots + k_{r-1} \alpha_{r-1} + k_r \alpha_r = 0,$$

对上式两边同时左乘 α_r^T , 得 $k_r \alpha_r^T \alpha_r = 0$, 由于 $\alpha_r \neq 0$, 所以 $k_r = 0$, 代入上式并利用 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ 的线性无关性, 得 $k_0 = k_1 = \dots = k_{r-1} = 0$. 因此 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r$ 线性无关, 从而 $\text{rank}(A_{r+1}) = r + 1$ 可见 $A_{n-1} x = 0$ 有非零解, 而 $A_n x = 0$ 只有零解. 这就证明了对于任意 $1 \times n$ 实矩阵 $A_1 \neq O, A_1, A_2, \dots, A_n$ 当 $r=n$ 时是满足条件的序列.

例 3.87 (浙江大学, 2001 年) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, b 是 $m \times 1$ 矩阵

(1) 证明: $\text{rank}(A^T A) = \text{rank } A$;(苏州大学, 2012 年)

(2) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 证明: 线性方程组 $A^T A x = A^T b$ 有解.(华东师范大学, 2014 年)

证 (1) 显然, 齐次方程组 $Ax = 0$ 的解必为 $A^T A x = 0$ 的解. 反之, 设 X 为 $A^T A x = 0$ 的解, 可取实的 n 维向量, 则 $X^T A^T A X = 0$. 令 $AX = Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 那么 $Y^T Y = 0$, 即 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 0$. 注意到 Y 是实向量, 所以 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, 即 $AX = 0$

由此可见, 齐次线性方程组 $A^T A x = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解, 具有相同的解空间. 于是

$$n - \text{rank}(A^T A) = n - \text{rank } A, \quad \text{即} \quad \text{rank}(A^T A) = \text{rank } A.$$

(2) 考虑方程组 $A^T A x = A^T b$ 的增广矩阵, 由于 $(A^T A, A^T b) = A^T (A, b)$, 所以

$$\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}(A^T A, A^T b) \leq \text{rank}(A^T) = \text{rank } A.$$

利用 (1) 的结论, 有 $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}, \mathbf{A}^T \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$. 因此, 方程组 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ 有解.

注 对于复矩阵 $\mathbf{A}$, 结论不成立. 例如: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{O}, \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. 显然, $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \neq \text{rank} \mathbf{A}$, 且 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ 无解. 此外, 第 8 章例 8.22 给出了 (1) 的另一证明.

例 3.88 设 $f \in C^1[x_0, x_2], x_0 < x_1 < x_2$, 问是否存在次数不超过 2 的多项式 $P(x)$, 满足

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_1) = f'(x_1), \quad P(x_2) = f(x_2)?$$

若存在, 则求出所有的 $P(x)$; 若不存在, 则给出一个反例

解 设 $P(x) = a + bx + cx^2$, 则由条件有

$$\begin{cases} a + x_0 b + x_0^2 c = f(x_0), \\ b + 2x_1 c = f'(x_1), \\ a + x_2 b + x_2^2 c = f(x_2). \end{cases}$$

因此, 多项式 $P(x)$ 存在当且仅当上述关于 a, b, c 的非齐次线性方程组有解

对方程组的增广矩阵 $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$ 施行初等行变换, 得

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & f(x_0) \\ 0 & 1 & 2x_1 & f'(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & f(x_2) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & f(x_0) \\ 0 & 1 & 2x_1 & f'(x_1) \\ 0 & 0 & h & k \end{pmatrix},$$

其中 $h = x_0 + x_2 - 2x_1, \quad k = \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} - f'(x_1)$. 下面分三种情形讨论:

(1) 若 $h \neq 0$, 则 $\text{rank} \mathbf{A} = 3$, 此时方程组有唯一解. 继续作初等行变换, 得

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \underbrace{x_0 f(x_2) - x_2 f(x_0)}_{x_0 - x_2} + \frac{k x_0 x_2}{h} \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{f'(x_1) - \frac{2k x_1}{h}}_h \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{k}_h \end{pmatrix},$$

由此可得 $a = \frac{x_0 f(x_2) - x_2 f(x_0)}{x_0 - x_2} + \frac{k x_0 x_2}{h}, b = f'(x_1) - \frac{2k x_1}{h}, c = \frac{k}{h}$.

(2) 若 $h = k = 0$, 则 $\text{rank} \mathbf{A} = \text{rank}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) = 2$, 方程组有无穷多解. 此时, 有

$$(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 x_2 & f(x_0) - x_0 f'(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & f'(x_1) \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

因此, 方程组的通解为

$$(a, b, c) = (x_0 x_2, -2x_1, 1)t + (f(x_0) - x_0 f'(x_1), f'(x_1), 0)$$

其中 t 为任意常数.

(3) 若 $h = 0$ 且 $k \neq 0$, 则 $\text{rank} A = 2, \text{rank}(A, \beta) = 3$, 所以方程组无解, 即多项式 $P(x)$ 不存在.

例如, 考虑 $f(x) = \sin x, x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}$, 则 $h = 0, k = \frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$. 若存在满足条件的多项式 $P(x) = a + bx + cx^2$, 则只能 $a=0$, 且 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 矛盾. 因此, $P(x)$ 不存在.

例 3.89 (四川大学, 2006 年) 设线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是数域 F 上的矩阵 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ 对于某个 $k (1 \leq k \leq n)$, 证明: 该方程组的任意解的第 k 个分量都为 0 的充分必要条件是, 划去增广矩阵 (A, β) 的第 k 列后秩要减少 1.

证 充分性. 把矩阵 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 那么划去增广矩阵 (A, β) 的第 k 列后秩要减少 1 就意味着 α_k 不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表示.

设 $X_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的任一解, 其中 $c_k \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\beta &= AX_0 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i, \\ \alpha_k &= \frac{1}{c_k} \beta + \sum_{i \neq k} \left(-\frac{c_i}{c_k} \right) \alpha_i,\end{aligned}$$

即 α_k 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性表示, 矛盾. 因此 $c_k = 0$

必要性. 方程组 $AX = \beta$ 有解 $\Leftrightarrow \text{rank} A = \text{rank}(A, \beta) \Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

用反证法. 假设划去增广矩阵 (A, β) 的第 k 列后秩不会减少, 则划去 A 的第 k 列后秩也不变, 这就意味着 A 的第 k 列 α_k 可由其余列 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 设为

$$\alpha_k = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{k-1} \alpha_{k-1} + l_{k+1} \alpha_{k+1} + \dots + l_n \alpha_n. \quad (1)$$

对于方程组 $AX = \beta$ 的任一解 $X_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, 其中 $c_k = 0$, 有

$$\beta = c_1 \alpha_1 + \dots + c_{k-1} \alpha_{k-1} + c_{k+1} \alpha_{k+1} + \dots + c_n \alpha_n. \quad (2)$$

于是, 由①式和②式得

$$(l_1 + c_1) \alpha_1 + \dots + (l_{k-1} + c_{k-1}) \alpha_{k-1} - \alpha_k + (l_{k+1} + c_{k+1}) \alpha_{k+1} + \dots + (l_n + c_n) \alpha_n = \beta.$$

这就是说, $X_1 = (l_1 + c_1, \dots, l_{k-1} + c_{k-1}, -1, l_{k+1} + c_{k+1}, \dots, l_n + c_n)^T$ 是方程组 $AX = \beta$ 的一个解, 且第 k 个分量为 -1 (不为零), 矛盾. 必要性得证.

例 3.90 (华东师范大学, 2008 年; 南昌大学, 2013 年) 设 A 是数域 K 上的一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 m 维非零列向量. 令

$$W = \{\alpha \in K^n \mid \text{存在 } t \in K, \text{ 使得 } A\alpha = tB\}$$

(1) 证明: W 关于 K^n 的运算构成 K^n 的一个子空间;

(2) 设线性方程组 $AX=B$ 的增广矩阵的秩为 r , 证明 W 的维数 $\dim W = n - r + 1$

(3) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

求 W 的一个基.

解 (方法 1) (1) 显然, W 包含 K^n 中的零向量, 所以 W 是 K^n 的非空子集.

任取 $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, 则存在 $t_1, t_2 \in K$, 使得 $A\alpha_1 = t_1B, A\alpha_2 = t_2B$. 所以

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = t_1B + t_2B = (t_1 + t_2)B.$$

故 $\alpha_1 + \alpha_2 \in W$. 又对任意 $k \in K$, 有

$$A(k\alpha_1) = kA\alpha_1 = (kt_1)B,$$

所以 $k\alpha_1 \in W$. 因此, W 关于 K^n 的运算构成 K^n 的一个子空间.

(2) 若 $\text{rank } A < \text{rank}(A, B) = r$, 则 $\text{rank } A = r - 1$, 且当 $t \neq 0$ 时非齐次方程组 $AX = tB$ 无解.

因此 W 就是 $AX=0$ 的解空间 S , 从而 $\dim W = n - \text{rank } A = n - r + 1$

若 $\text{rank } A = \text{rank}(A, B) = r$, 则方程组 $AX = tB$ 对任意 $t \in K$ 都有解, 故 $AX=0$ 的解空间 S 是 W 的真子空间. 因此, 存在 $\alpha \in W, t \in K$ 且 $t \neq 0$, 使 $A\alpha = tB$ 于是, 有 $A(\frac{1}{t}\alpha) = B$, 即 $\frac{1}{t}\alpha \in W$ 是 $AX = B$ 的一个特解. 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $A\eta_j = 0 (j = 1, 2, \dots, n-r)$, 且 $\frac{1}{t}\alpha, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关. 另一方面, 若 $\beta \in W$, 则 $\beta, \frac{1}{t}\alpha, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性相关, 所以 $\dim W = n - r + 1$

(3) 根据 (2) 的证明过程可知, W 的基可由 $AX = B$ 的一个特解与 $AX = 0$ 的一个基础解系构成.

对线性方程组 $AX = B$ 的增广矩阵施行初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, $\dim W = n - \text{rank}(A, B) + 1 = 3$, 并且可解得 W 的一个基为

$$\xi_1 = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \xi_2 = (-1, -1, 1, 0)^T, \quad \xi_3 = (-1, 1, 0, 1)^T.$$

(方法 2) (1) 同方法 1.

(2) 考虑 $n+1$ 元齐次线性方程组 $(A, B)Y = 0$, 据题设, 其解空间 U 的维数为

$$\dim U = (n+1) - \text{rank}(A, B) = n - r + 1.$$

任取 $\alpha \in W$, 则存在 $t \in K$, 使 $A\alpha = tB$. 所以 $\begin{pmatrix} \alpha \\ -t \end{pmatrix}$ 是齐次方程组 $(A, B)Y = 0$ 的解. 于是, 存在由 W 到 U 的映射

$$\varphi: \alpha \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -t \end{pmatrix}$$

显然, $\varphi: W \rightarrow U$ 是一个双射. 又 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in W$ 存在 $t_1, t_2 \in K$, 使得 $A\alpha_1 = t_1B, A\alpha_2 = t_2B$, 则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = (t_1 + t_2)B.$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 + \alpha_2) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ -t_1 - t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -t_2 \end{pmatrix} = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2), \\ \varphi(k\alpha_1) &= \begin{pmatrix} k\alpha_1 \\ -kt_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -t_1 \end{pmatrix} = k\varphi(\alpha_1). \end{aligned}$$

这就表明, $\varphi: W \rightarrow U$ 是一个同构映射. 从而有 $\dim W = \dim U = n - r + 1$

(3) 由 (2) 的证明可知, W 与如下齐次线性方程组的解空间同构:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

经直接计算, 此方程组的一个基础解系为

$$\eta_1 = (0, 1, 0, 0, -1)^T, \quad \eta_2 = (-1, -1, 1, 0, 0)^T, \quad \eta_3 = (-1, 1, 0, 1, 0)^T.$$

于是 η_1, η_2, η_3 在映射 φ 下的原像为

$$\xi_1 = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \xi_2 = (-1, -1, 1, 0)^T, \quad \xi_3 = (-1, 1, 0, 1)^T.$$

即为 W 的一个基

例 3.91 (华东理工大学, 2001 年) (1) 证明: 若 n 阶方阵 $T = (t_{ij})$ 主对角线上的元 t_{ii} 均不为零, 则存在向量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 使 TY 的每个分量都不为零;

(2) 若线性方程组 $Ax = 0$ 的一个解 x_0 的各个分量都不为零, 则称 x_0 为 $Ax = 0$ 的一个强非零解. 试证: $Ax = 0$ 有强非零解的充分必要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

证 (1) 不妨设 $T = (t_{ij}) \in F^{n \times n}$, 考虑 n 维向量空间 $F^{n \times 1}$ 的子空间

$$W_i = \{Y \in F^{n \times 1} \mid (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in})Y = 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

由 $t_{ii} \neq 0$ 知, $\dim W_i = n - 1$, 即 W_i 是 $F^{n \times 1}$ 的真子空间. 根据第 5 章例 5.34, 存在 $Y_0 \in F^{n \times 1}$, 使得 $Y_0 \notin W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$.

因此, TY_0 的每个分量都不为零.

(2) 必要性. 设 $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$, $\eta_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 $Ax = 0$ 的一个强非零解, 把 A 按列

分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则由 $A\eta_0 = 0$ 得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0.$$

对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 因为 $x_i \neq 0$, 所以

$$\alpha_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(-\frac{x_k}{x_i} \right) \alpha_k,$$

即 A 的任一列向量 α_i 均可表为其余列向量的线性组合

充分性. 由于 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的任一列向量均可由其余列向量线性表示, 故可设

$$\alpha_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n t_{ki} \alpha_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

现在, 记

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -t_{12} & -t_{13} & \cdots & -t_{1,n-1} & -t_{1n} \\ -t_{21} & 1 & -t_{23} & \cdots & -t_{2,n-1} & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -t_{n-1,1} & -t_{n-1,2} & -t_{n-1,3} & \cdots & 1 & -t_{n-1,n} \\ -t_{n1} & -t_{n2} & -t_{n3} & \cdots & -t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

则 $AT = O$ 因为 T 的任一主对角元均不为零, 所以存在 $Y_0 \in F^{n \times 1}$, 使得 TY_0 的每个分量都不为零. 令 $\eta_0 = TY_0$, 则 $A\eta_0 = ATY_0 = O$. 因此, η_0 是 $Ax = O$ 的一个强非零解.

例 3.92 把函数 $\frac{x}{\ln(1+x)}$ 展开成幂级数时得到

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + \cdots.$$

证明: 展开式的系数 $\{h_n\}$ 可以用行列式表示为

$$h_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \Delta.$$

证 因为 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$, 所以

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + \cdots}$$

将此式与题设条件比较, 得

$$(1 + h_1x + \cdots + h_nx^n + \cdots) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} + \cdots \right) = 1.$$

比较等式两端 x 同次幂的系数, 得

$$\begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}h_1 - h_2 = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3}h_1 - \frac{1}{2}h_2 + h_3 = \frac{1}{4}, \\ \cdots \cdots \cdots \\ \frac{1}{n}h_1 - \frac{1}{n-1}h_2 + \frac{1}{n-2}h_3 + \cdots + (-1)^{n-1}h_n = \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

这是关于未知数 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 的线性方程组, 根据 Cramer 法则, 得 $h_n = \frac{D_n}{D}$, 其中

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & -\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & \cdots & (-1)^{n-2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2}}{2} & (-1)^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -\frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 1 & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2}}{2} & \frac{1}{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta,$$

于是 $h_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \Delta$

例 3.93 (南开大学, 2006 年) 设 A 是 n 阶方阵, 将 A 作分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_4 分别为 k 阶和 $n-k$ 阶方阵 ($1 \leq k < n$), 已知 A_4 为可逆矩阵. 又设 $B = (b_1, b_1, \dots, b_n)^T$ 为一个列矩阵, 作线性方程组 $AX=B$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为未知数. 证明:

- (1) 若 $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ 可逆, 则线性方程组有唯一解;
- (2) 设 $B_1 = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T, B_2 = (b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)^T, B_3 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$. 若 $\text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_3) = \text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) < k$, 则线性方程组有无穷多个解; 若 $\text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, B_3) > \text{rank}(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)$, 则线性方程组无解.

证 (1) 对增广矩阵施行初等行变换, 把第二行左乘 $-A_2 A_4^{-1}$ 加到第一行, 得

$$(A, B) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 & 0 & B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2 \\ A_3 & A_4 & B_2 \end{pmatrix}$$

因为 $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ 和 A_4 均可逆, 所以 $|A| = |A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3| |A_4| \neq 0$, 故 $AX=B$ 有唯一解.

- (2) 记 $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T, X_2 = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)^T$, 则 $AX = B$ 与如下方程组同解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3) \mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_3, \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_4 \mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2. \end{cases}$$

如果第一个方程有解 $\mathbf{X}_1$, 代入第二个方程解得 $\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_4^{-1}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_1)$, 那么原方程组有解 $\mathbf{X}$. 于是, 若 $\text{rank}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3) = \text{rank}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3) < k$, 意味着第一个方程有无穷多个解, 则原方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有无穷多个解; 若 $\text{rank}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3, \mathbf{B}_3) > \text{rank}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)$, 意味着第一个方程无解, 则原方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 无解.

例 3.94 (北京师范大学, 1991 年) 设有数域 F 上的两个线性方程组

(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

与

(II)

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = c_s. \end{cases}$$

若 (I) 有解, 则 (II) 与 (I) 同解 $\iff F^{n+1}$ 中的两个向量组

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_1), & \beta_1 = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}, c_1), \\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, b_2), & \beta_2 = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}, c_2), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, b_m) & \beta_s = (b_{s1}, b_{s2}, \dots, b_{sn}, c_s) \end{array} \quad \text{与} \quad \text{等价}.$$

证 记 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, $\xi = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $\eta = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 则线性方程组 (I) 与 (II) 分别为 $AX = \xi$, $BX = \eta$. 又用 W_1, W_2 分别表示 (I) 与 (II) 的导出组 $AX = 0, BX = 0$ 的解空间. 据题设, 方程组 (I) 有解, 所以

$$\text{rank} A = \text{rank}(A, \xi) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

必要性. 设 (II) 与 (I) 同解, 那么 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 也与 (I) 同解, 且 $W_2 = W_1$, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 的解空间也等于 W_1 . 因此 $\text{rank} B = \text{rank}(B, \eta) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, 且

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & \xi \\ B & \eta \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = n - \dim W_1 = \text{rank} A = \text{rank} B,$$

即

$$\text{rank}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_s) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s).$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价.

充分性. 设 $X_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in F^n$ 是方程组 (I) 的解, 即 $AX_0 = \xi$, 则有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (\textcircled{1})$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价, 所以任意 β_i 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 特别, 对于 β_1 , 存在 $k_1, k_2, \dots, k_m \in F$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \beta_1$, 即

[illegible]

将②式的前 n 个等式依次乘 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 后再相加, 并利用①式以及②式的最后一个等式, 得

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1.$$

同理, 对 $\beta_2, \dots, \beta_s$ 依次可得

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2,$$

因此 $X_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是方程组 (II) 的解.

反之, 若 X_0 是方程组 (II) 的解, 注意到任意 α_i 都可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则利用与上述完全相同的方法可证 X_0 是方程组 (I) 的解. 因此 (II) 与 (I) 同解.

例 3.95 (RMC 试题, 2004 年) 设 a, b, c, d 是相差 1 的正整数, x, y, z, t 是实数, 满足 $a^x = bcd, b^y = cda, c^z = dab, d^t = abc$. 证明: 行列式

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = 0.$$

证 将题设等式都取对数, 得

$$\begin{cases} -x \ln a + \ln b + \ln c + \ln d = 0, \\ \ln a - y \ln b + \ln c + \ln d = 0, \\ \ln a + \ln b - z \ln c + \ln d = 0, \\ \ln a + \ln b + \ln c - t \ln d = 0. \end{cases}$$

这表明, $(\ln a, \ln b, \ln c, \ln d)^T$ 是相应齐次方程组的一个非零解. 因此, 该方程组系数矩阵

$$\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

的行列式为零, 即得所证

注 RMC 是 Romania Mathematical Competitions(罗马尼亚数学竞赛) 的缩写, 在本书中主要包括 Romania National Olympiad 或 District Olympiad 等竞赛.

例 3.96 (北京大学, 2019 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的列向量组, 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 $\mathbb{R}^t$ 中线性无关的列向量组. 证明: 若存在实数 $c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, t$, 使得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t c_{ij} \alpha_i \beta_j^T = O,$$

则系数 c_{ij} 全为零.

证 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in M_{n,m}(\mathbb{R}), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \in M_{t,t}(\mathbb{R}), C = (c_{ij}) \in M_{m,t}(\mathbb{R})$, 则所给等式可用矩阵表示为 $ACB^T = O$. 左乘 A^T 并右乘 B , 得

$$(A^T A) C (B^T B) = O. \quad (1)$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 A 是列满秩矩阵. 根据本章例 3.87, 知 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank} A = m$, 所以 $A^T A$ 是 m 阶可逆矩阵. 同理, $B^T B$ 是 t 阶可逆矩阵.

于是, 对①式利用矩阵的消去律可得 $C = O$, 即 $c_{ij} = 0 (1 < i < m, 1 < j < t)$

注 因为 A 列满秩, B^T 行满秩, 所以可直接由 $ACB^T = O$ 利用左、右消去律 (见第 4 章例 4.85), 即得 $C = O$

例 3.97 (华东师范大学, 2003 年) 设 $f(x), g(x)$ 为数域 K 上互素的多项式, C 为 K 上的 n 阶方阵 $A = f(C), B = g(C)$. 证明: 方程 $ABX = O$ 的每一个解 X 均可唯一地表为 $X = Y + Z$ 的形式, 其中 Y, Z 分别为方程 $BY = O$ 与 $AZ = O$ 的解.

证 首先, 根据题设有 $(f(x), g(x)) = 1$, 所以存在 $u(x), v(x) \in K[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

于是, 有

$$u(C)f(C) + v(C)g(C) = E_n. \quad (1)$$

对于方程 $ABX = O$ 的任一解 X_0 , 将上式两边同时右乘 X_0 , 得

$$X_0 = u(C)f(C)X_0 + v(C)g(C)X_0 = Y_0 + Z_0,$$

其中 $Y_0 = u(C)AX_0, Z_0 = v(C)BX_0$

注意到 $\forall p(x), q(x) \in K[x]$, 易知 $p(C)q(C) = q(C)p(C)$. 所以

$$BY_0 = u(C)ABX_0 = O,$$

$$AZ_0 = v(C)ABX_0 = O,$$

即 Y_0, Z_0 分别为 $BY=O$ 与 $AZ=O$ 的解.

下面再证分解的唯一性. 假设 $X_0 = Y_1 + Z_1$, 其中 Y_1, Z_1 分别为 $BY=O$ 与 $AZ=O$ 的解, 则 $Y_0 - Y_1 = Z_1 - Z_0$, 且 $Y_0 - Y_1$ 是 $BY=O$ 的解, 而 $Z_1 - Z_0$ 是 $AZ=O$ 的解. 令 $S = Y_0 - Y_1 = Z_1 - Z_0$, 则 $BS = O, AS = O$ 于是, 由①式可得

$$S = u(C)AS + v(C)BS = O.$$

所以 $Y_0 = Y_1$ 且 $Z_0 = Z_1$. 这就证明了解的唯一性.

例 3.98 设 x_1, x_2, x_3, x_4 是双曲线 $xy=1$ 上互异的 4 点的横坐标, 证明: 若这 4 点共圆, 则 $x_1x_2x_3x_4 = 1$

证 设 4 点所在圆的方程为 $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, 其中 $A, B, C \in \mathbb{R}$, 则

$$x_i^2 + \frac{1}{x_i^2} + 2Ax_i + 2B\frac{1}{x_i} + C = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

这是以 $(1, 2A, 2B, C)$ 为非零解的齐次线性方程组, 其系数行列式等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} & x_1 \frac{1}{x_1} & 1 \\ x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} & x_2 \frac{1}{x_2} & 1 \\ x_3^2 + \frac{1}{x_3^2} & x_3 \frac{1}{x_3} & 1 \\ x_4^2 + \frac{1}{x_4^2} & x_4 \frac{1}{x_4} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

将上述行列式按第一列拆项并化简, 得

$$\left(-\frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2} \right) \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

注意到 4 阶 Vandermonde 行列式 $\prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j) \neq 0$, 所以 $\frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2} = 0$ 由此可解得 $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$

注 本题的另一有效解法: 根据上述过程易知, x_1, x_2, x_3, x_4 是 4 次方程

$$t^4 + 2At^3 + ct^2 + 2Bt + 1 = 0$$

的所有根, 利用根与系数的关系 (Vieta 定理), 即得 $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$

例 3.99 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $s \times n$ 矩阵, W_A 与 W_B 分别是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解空间, 则 $W_A \subseteq W_B$ 的充分必要条件是存在 $s \times m$ 矩阵 P 使得 $PA=B$.

证 充分性显然, 只证必要性. 因为 $W_A \subseteq W_B$, 即方程组 $Ax = 0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解,

所以 $Ax = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 同解, 因此 $\text{rank} A = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 令 $\text{rank} A = r$, 则存在 m 阶可逆矩阵 P_1 使得 $P_1 A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1 为 $r \times n$ 行满秩矩阵. 由 $\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r$ 可知, A_1 的行向量是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的行向量组的一个极大无关组, 故存在 $s \times r$ 矩阵 C , 使得 $B = CA_1$. 取 $s \times m$ 矩阵 $P = (C, O_{s \times (m-r)})P_1$, 则

$$PA = (C, O_{s \times (m-r)}) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = CA_1 = B.$$

注 本题与第 6 章例 6.36 是同一问题的代数特征和几何意义的两种不同表述

例 3.100 (北京大学, 2010 年) 设 A, B 是 n 阶实方阵, 满足 $A = (B - \frac{1}{110}E)^T(B + \frac{1}{110}E)$. 证明: 对任意的 n 维列向量 ξ , 线性方程组 $A^T(A^2 + A)X = A^T\xi$ 必有解.

证 首先, 根据本章例 3.87(2), 对任意 n 维列向量 ξ , 线性方程组 $(A^T A)Y = A^T\xi$ 有解. 设 η 是其中一个解, 则 $(A^T A)\eta = A^T\xi$. 下证方程组 $(A + E)X = \eta$ 有解. 注意到其系数矩阵

$$A + E = \left[B^T B + \left(1 - \frac{1}{110^2}\right)E \right] + \frac{1}{110}(B^T - B),$$

观察等式的右端, 第一部分是实对称正定矩阵, 第二部分是实反对称矩阵, 其和的行列式大于 0 (见第 9 章例 9.74), 即 $|A + E| > 0$, 因此 $\text{rank}(A + E) = n$, 方程组 $(A + E)X = \eta$ 有唯一解, 设为 X_0 , 则 $(A + E)X_0 = \eta$. 于是, 有

$$A^T(A^2 + A)X_0 = (A^T A)(A + E)X_0 = (A^T A)\eta = A^T\xi,$$

即 X_0 是原方程组的解.

注 对于复矩阵, 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^T A = O, A^T \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, 方程组无解.

例 3.101 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 $n(n \geq 4)$ 个互不相同的实数. 求出下面具有 n 个未知元 $n-2$ 个方程的线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_n^2 x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1^{n-3} x_1 + a_2^{n-3} x_2 + \dots + a_n^{n-3} x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

解 首先, 因 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 各不相同, Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \dots & a_{n-2}^{n-3} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-2} (a_i - a_j) \neq 0,$$

所以方程组①的系数矩阵的秩为 $n-2$, 基础解系含两个解. 为了求方程组①的基础解系, 考虑

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

对于 $k = 0, 1, \dots, n-1, x^k/f(x)$ 的部分分式展开为

$$\frac{x^k}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^k / f'(a_i)}{x - a_i},$$

从而有

$$x^k = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{f'(a_i)} \frac{f(x)}{x - a_i}.$$

比较两边上式两边的系数, 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{f'(a_i)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, n-2, \\ 1, & k = n-1. \end{cases}$$

这就表明, 向量

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \left(\frac{1}{f'(a_1)}, \frac{1}{f'(a_2)}, \dots, \frac{1}{f'(a_n)} \right), \\ \eta_2 &= \left(\frac{a_1}{f'(a_1)}, \frac{a_2}{f'(a_2)}, \dots, \frac{a_n}{f'(a_n)} \right) \end{aligned}$$

都是方程组的解. 下证这两个解是线性无关的, 若不然, 则存在不全为零的实数 s_1, s_2 , 使得

$$s_1 \eta_1 + s_2 \eta_2 = \mathbf{0},$$

即有

$$s_1 + s_2 a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

如果 $s_2 = 0$, 那么 $s_1 = 0$, 矛盾, 所以 $s_2 \neq 0$, 于是

$$a_i = -\frac{s_1}{s_2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

此与 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 各不相同的事实矛盾. 所以 η_1, η_2 线性无关. 于是, 方程组的通解为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = s\eta_1 + t\eta_2 = \left(\frac{s + ta_1}{f'(a_1)}, \frac{s + ta_2}{f'(a_2)}, \dots, \frac{s + ta_n}{f'(a_n)} \right),$$

其中 s, t 为任意实数.

3.6 思考与练习

- 3.1 (中国科学院, 2006 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s > 2)$ 线性无关. 试讨论 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{s-1} + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_1$ 的线性相关性.
- 3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 $2m$ 个向量, 且 $\beta_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j (1 \leq j \leq m)$. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.
- 3.3 (华中科技大学, 2012 年) 设 A 为实矩阵, 证明 $\text{rank}(A^T A) = \text{rank} A = \text{rank}(A A^T)$
- 3.4 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 在其中任意取 m 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}$ 证明:

$$\text{rank} \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_m}\} \geq r + m - s.$$

- 3.5 (上海大学, 2013 年) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求此

向量组的一个极大无关组, 并将其他向量表示为此极大无关组的线性组合:

- 3.6 (厦门大学, 2014 年) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 但不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出. 求证: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$ 等价.
- 3.7 (大连理工大学, 2007 年) 设非齐次线性方程组为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

证明: 如果

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix},$$

那么该方程组有解.

3.8 (南开大学,2005 年) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ -x_1 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ax_1 + cx_2 - ex_4 = 0, \\ bx_1 + dx_2 - ex_3 = 0 \end{cases}$$

的一般解以 x_3, x_4 为自由未知量.

(1) 求 a, b, c, d, e 满足的条件;

(2) 求齐次线性方程组的基础解系

3.9 设 A 是数域 F 上秩为 r 的 n 阶对称矩阵, 证明: A 中必存在一个非零的 r 阶主子式

3.10 (北京师范大学,2013 年) 叙述并证明 Cramer 法则.

3.11 (华中科技大学,2007 年) 证明: 平面上三条不同的直线 $ax + by + c = 0, bx + cy + a = 0, cx + ay + b = 0$ 相交的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

3.12 (中国科学院, 2001 年) 设 a, b, c, d 均为正实数, 求出满足 $y \geq ax + b$ 与 $y \geq -cx + d$ 之 y 的最小值.

3.13 (北京师范大学,2004 年) 已知线性方程组

$$x_1 + x_2 = a_1,$$

$$x_3 + x_4 = a_2,$$

$$x_1 + x_3 = b_1,$$

$$x_2 + x_4 = b_2.$$

(1) 求出系数矩阵的秩;

(2) 给出方程组有解的充分必要条件

3.14 (东南大学,2011 年) 设 $n \geq 2$, 问: 当 a 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 2, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = n \end{cases}$$

没有解, 有唯一解, 有无穷多解? 当线性方程组有无穷多解时, 求其通解

3.15 (西安电子科技大学,2010 年) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & c \\ a & 0 & 1 & c \\ 0 & c & c & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 讨论 a 与 c 取何值时, 线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解, 无解, 有无穷多解? 并在有无穷多解时, 求其通解

3.16 设 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

的一个解.

(1) 试求方程组的通解, 并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示通解;

(2) 试求方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

3.17 (北京大学,2006 年)(1) 设 A, B 分别是数域 K 上 $s \times n, s \times m$ 矩阵, 叙述矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件, 并且给予证明;

(2) 设 A 是数域 K 上 $s \times n$ 列满秩矩阵, 试问: 矩阵方程 $XA = E_n$ 是否有解? 若有解, 则求出它的解集. 要求写出理由;

(3) 设 A 是数域 K 上 $s \times n$ 列满秩矩阵, 试问: 对于数域 K 上任意 $s \times m$ 矩阵 B , 矩阵方程 $AX = B$ 是否一定有解? 当有解时, 它有多少个解? 求出它的解集. 要求写出理由.

3.18 (北京大学,2008 年)(1) 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 有解且 $\text{rank } A = r$, 则 $AX = \beta$ 的解向量中线性无关的最多有多少个? 并找出一组个数最多的线性无关解向量;

(2) 设方程组 $AX = \beta$ 对于所有的 s 维非零向量 β 都有解, 求 $\text{rank } A$.

3.19 (四川大学,2007 年) 叙述并证明线性方程组有解的判别定理; 当线性方程组有解时, 给出它的通解并证明之

3.20 (四川大学,2009 年)(1) 叙述并证明线性方程组的 Cramer 法则;

(2) 设 F, K 都是数域且 $F \subseteq K$. 已知 $AX = \beta$ 是数域 F 上的线性方程组. 证明 $AX = \beta$ 在 F 上有解当且仅当 $AX = \beta$ 在 K 上有解.

3.21 (南京航空航天大学,2010 年) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $m \times n$ 矩阵 A 的行向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $s \times n$ 矩阵 B 的行向量组 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 证明:

(1) 如果 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 那么方程组 $BX = 0$ 的任一解都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示;

(2) 方程组 $AX = 0$ 与方程组 $BX = 0$ 同解的充分必要条件是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与向量组 $|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|$ 等价.

3.22 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, W_A 与 W_B 分别是齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的解空间.

(1) 证明: $W_A \subseteq W_B$ 的充分必要条件是存在 m 阶方阵 P 使得 $PA = B$

(2) 证明: $W_A = W_B$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 T 使得 $TA=B$.

3.23 (南开大学, 2008 年) 设 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 为 n 阶方阵, 且 $\text{rank}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \text{rank } A_m$. 证明: 对任何 $1 \leq j, k \leq m$, 齐次线性方程组 $A_j A_{j+1} \cdots A_m x = 0$ 与 $A_k A_{k+1} \cdots A_m x = 0$ 同解.

3.24 求解齐次线性方程组

[illegible]

其中 $a_{ii} = 2019, i = 1, 2, \cdots, n; a_{ij} \in \{2018, 610, -2018, -610\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$.

3.25 设 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{p,n}(K)$. 证明下列命题相互等价:

(1) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解;

(2) 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $B\xi_1, B\xi_2, \dots, B\xi_s$ 线性相关;

(3) 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是 $Bx = 0$ 的基础解系, 则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性相关.

3.26 设 A 为方阵, 请根据线性方程组 (1) $AX = \beta_1$ 和 (2) $AX = \beta_2$ 的解的下列三种情形:

(A) (1) 和 (2) 都有解; (B)(1) 有解而 (2) 无解; (C)(1) 和 (2) 都无解,

分别讨论线性方程组 (I) : $(A, \beta_1) X = \beta_2$ 和 (II) : $(A, \beta_2) X = \beta_1$ 有解, 无解还是不能确定.

3.27 (北京交通大学, 2012 年) 已知向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b+2 \end{pmatrix}.$$

(1) a, b 为何值时, β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(2) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出且表法不唯一? 并写出其一般表达式

3.28 (数学二, 2005 年) 试确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

3.29 (数学二, 2019 年) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$ 与向量组 $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$ 等价, 求常数 a 的取值, 并将向量 β_3 用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

3.30 (数学一, 2014 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵

(1) 求齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

3.31 (数学一, 2013 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a, b 为何值时存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求出所有矩阵 C .

3.32 设有线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明: 若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则此线性方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 且已知 $\beta = (-1, 1, 1)^T$ 是该方程组的解. 试写出此方程组的通解.

3.33 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, β_1, β_2 都是 m 维列向量. 证明: 方程组 $Ax = \beta_1$ 与 $Ax = \beta_2$ 同时有解当且仅当 $\text{rank} A = \text{rank} B$, 其中 $B = (A, \beta_1, \beta_2)$ 是 $m \times (n + 2)$ 矩阵.

3.34 设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_t\}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 证明: $\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2$

3.35 (南京航空航天大学, 2013 年) 设 A 是秩为 r_1 的 $m \times n$ 矩阵, B 是秩为 r_2 的 $m \times k$ 矩阵, 分块矩阵 $C = (A, B)$ 的秩为 r . 证明:

(1) $\max\{r_1, r_2\} \leq r \leq r_1 + r_2$

(2) 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是 $r = r_1$

(3) 齐次线性方程组 $A^T Y = 0$ 与 $C^T Y = 0$ 同解的充分必要条件是 $AX = B$ 有解.

3.36 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 且 $|a_{ii}a_{ji}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$ 对任意 $i, j (i \neq j)$ 成立, 证明: $\det A \neq 0$.

3.37 (兰州大学,2012 年) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 且 $r \geq s$. 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 必线性相关.

3.38 (武汉大学,2010 年) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 1, \\ ax_1 + x_2 + 5x_3 + bx_4 = 3 \end{cases}$$

(I):

有三个线性无关的解.

(1) 记方程组 (I) 的系数矩阵为 A , 试证明: $\text{rank} A = 2$;

(2) 求 a, b 的值.

(3) 求方程组 (I) 的通解

3.39 (南京大学,2010 年) 设 α, β 都是实数域上的 n 维列向量, 并且 $\alpha \neq 0$. 请构造一个 n 阶方阵 A 使得 A 满足下面两个条件:

(1) $A\alpha = \beta$

(2) 对于方程 $\alpha^T X = 0$ 的任意一个解 X 都有 $AX = X$.

3.40 (中山大学,2016 年) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & h & -g \\ -b & -h & 0 & f \\ -c & g & -f & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

(1) 计算 A 的行列式 $\det A$;

(2) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 证明: 线性方程组 $(\lambda I + A)x = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $\lambda = af + bg + ch = 0$.

3.41 (中南大学,2013 年) 设 A, B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, 满足 $ABA = A$, 又设 b 是 m 维列向量. 证明: 线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是 $ABb = b$, 且在有解时其通解为

$$X = Bb + (E_n - BA)Y,$$

其中 E_n 为 n 阶单位矩阵, Y 为任意 n 维列向量.

3.42 设在几何空间 R^3 中, 平面 Π_i 的方程为 $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$

(1) 给出这 4 个平面可围成四面体的条件, 请阐述理由;

(2) 求出这 4 个平面围成的四面体的体积

3.43 设 A 为 n 阶方阵 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 $(A - E)x = 0$ 的一个基础解系, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是齐次线性方程组 $(A + E)x = 0$ 的一个基础解系, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 $(A^2 - E)x = 0$ 的一个基础解系.

附录 思考与练习解答

答 3.1 令

$$v_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} \quad (i = 1, \dots, s), \quad \alpha_{s+1} = \alpha_1.$$

若 $\sum_{i=1}^s c_i v_i = 0$, 则由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 得到

$$c_s + c_1 = 0, \quad c_i + c_{i+1} = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1).$$

故 $c_i = (-1)^{i-1} c_1$, 再由 $(1 + (-1)^{s-1})c_1 = 0$ 可知: 当 s 为奇数时向量组线性无关; 当 s 为偶数时线性相关。

答 3.2 记

$$B = (\beta_1, \dots, \beta_m), \quad A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

则 $B = AU$, 其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det U = 1.$$

因此 U 可逆, A 与 B 的列空间相同, 故两组列向量同时线性无关或同时线性相关。

答 3.3 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵。若 $Ax = 0$, 显然 $A^T Ax = 0$ 。反之, 若 $A^T Ax = 0$, 则

$$0 = x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2,$$

故 $Ax = 0$ 。于是 $\ker(A^T A) = \ker A$, 所以

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank } A.$$

对 A^T 应用同一结论, 得 $\text{rank}(AA^T) = \text{rank } A$ 。

答 3.4 任取其中 m 个向量组成向量组 B , 其余 $s - m$ 个向量组成 C 。原向量组张成的空间包含在 $\text{span}(B) + \text{span}(C)$ 中, 因此

$$r \leq \text{rank } B + (s - m),$$

即

$$\text{rank } B \geq r + m - s.$$

答 3.5 把五个向量作为列向量排成矩阵并作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故秩为 3, 且 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 是一个极大无关组,

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_5 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$

答 3.6 因为 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 设

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_s\alpha_s.$$

若 $c_s = 0$, 则 β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ 表示, 矛盾, 所以 $c_s \neq 0$. 于是

$$\alpha_s = \frac{1}{c_s} \left(\beta - \sum_{i=1}^{s-1} c_i \alpha_i \right),$$

说明 α_s 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$ 表示; 而 β 又可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 表示. 两组向量可以互相线性表示, 故等价.

答 3.7 记系数矩阵为 A , 增广矩阵为 $\tilde{A} = (A, b)$. 若方程组无解, 则

$$\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A + 1.$$

但 $\tilde{A}$ 是分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{pmatrix}$$

的前 n 行, 因此 $\text{rank } M \geq \text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A + 1$, 与题设 $\text{rank } M = \text{rank } A$ 矛盾. 所以方程组有解.

答 3.8 由前两个方程可得

$$x_1 = cx_3 + dx_4, \quad x_2 = -ax_3 - bx_4.$$

代入后两个方程. 由于 x_3, x_4 是自由未知量, 对应系数必须都为零, 故

$$ad - bc = e, \quad bc - ad = e,$$

从而

$$ad = bc, \quad e = 0.$$

此时基础解系为

$$\xi_1 = (c, -a, 1, 0)^T, \quad \xi_2 = (d, -b, 0, 1)^T.$$

通解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2, \quad t_1, t_2 \in F.$$

答 3.9 把 A 看作 F^n 上对称双线性型的矩阵. 取坐标子集 I , 使主子式 $|A_{II}|$ 非零, 并令 $|I| = q$ 尽可能大. 若 $q < r$, 把矩阵重排为

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

其中 $B = A_{II}$ 可逆. 记 Schur 补 $S = D - C^T B^{-1} C$. 若 S 有非零对角元 s_{ii} , 则 $I \cup \{i\}$ 对应一个更大的非零主子式; 若某个 $s_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$), 则 $I \cup \{i, j\}$ 对应的主子式也非零. 两种情形都与 q 的极大性矛盾. 因此 $S = 0$, 从而 $\text{rank } A = q$. 于是 $q = r$, 即存在一个非零的 r 阶主子式.

答 3.10 Cramer 法则. 设含有 n 个未知量的 n 元线性方程组为

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

其系数行列式 $D = \det(a_{ij}) \neq 0$. 则方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, \dots, n),$$

其中 D_j 是把 D 的第 j 列换成常数项列 $(b_1, \dots, b_n)^T$ 后所得的行列式.

证明. 把第 j 个方程乘以 D 的第 j 行元素的代数余子式, 再关于 j 求和. 利用行列式按列展开, 立即得到

$$Dx_j = D_j.$$

因 $D \neq 0$, 所以 $x_j = D_j/D$. 另一方面, 若两个列向量 x, y 都是解, 则 $A(x - y) = 0$. 若 $x \neq y$, 则齐次方程组有非零解, 从而 $D = 0$, 与假设矛盾. 因此解唯一.

答 3.11 三条直线有公共点的充分必要条件是三条直线方程构成的齐次方程组有非零解 $(x, y, 1)$, 故系数行列式为零. 计算得

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

而

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2).$$

若 $a = b = c$, 三直线重合, 与题设“三条不同的直线”矛盾. 因此上述行列式为零当且仅当

$$a + b + c = 0.$$

答 3.12 设两边界直线的交点为 (x_0, y_0) . 由

$$y_0 = ax_0 + b = -cx_0 + d$$

得

$$x_0 = \frac{d-b}{a+c}, \quad y_0 = \frac{ad+bc}{a+c}.$$

可行域是两条直线的上方区域, 且函数 y 无上界, 因此最小值为

$$\boxed{y_{\min} = \frac{ad+bc}{a+c}}.$$

答 3.13 系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第一、二、三行线性无关, 而第四行等于第一、二行之和减去第三行, 所以 $\text{rank } A = 3$.

方程组有解当且仅当

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2.$$

此时令 $x_3 = t$, 则

$$x_1 = b_1 - t, \quad x_2 = a_1 - b_1 + t, \quad x_4 = a_2 - b_1 + t, \quad t \in F.$$

故通解为

$$X = (b_1, a_1 - b_1, 0, a_2 - b_1)^T + t(-1, 1, 1, 1)^T.$$

答 3.14 令 $S = x_1 + \cdots + x_n$. 方程组等价于

$$iS + ax_i = i, \quad i = 1, \dots, n.$$

当 $a = 0$ 时, 所有方程等价于 $S = 1$, 故有无穷多解

$$x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$x_i = 1 - \frac{iS}{a}.$$

相加得

$$S = n - \frac{S n(n+1)}{2a},$$

即

$$\left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) S = na.$$

因此:

- 若 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$, 则 $na \neq 0$, 方程组无解;
- 若 $a \notin \left\{0, -\frac{n(n+1)}{2}\right\}$, 则方程组有唯一解

$$x_i = 1 - \frac{ni}{a + \frac{n(n+1)}{2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

答 3.15 把 A 的第 2, 3 个方程相减, 得 $x_2 = x_3$. 令 $x_2 = x_3 = t$, 原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 + at + at = 1, \\ ax_1 + t + cx_4 = 0, \\ 2ct + x_4 = 1. \end{cases}$$

消去 x_1, x_4 得

$$(1 - 2a^2 - 2c^2)t = -(a + c).$$

记 $\Delta = 1 - 2a^2 - 2c^2$.

若 $\Delta \neq 0$, 方程组有唯一解

$$x_1 = 1 + \frac{2a(a+c)}{\Delta}, \quad x_2 = x_3 = -\frac{a+c}{\Delta}, \quad x_4 = 1 + \frac{2c(a+c)}{\Delta}.$$

若 $\Delta = 0$, 则 $a^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. 此时方程组有解当且仅当 $a + c = 0$, 即

$$(a, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{或} \quad (a, c) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

这时有无穷多解:

$$\begin{cases} (a, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right): & X = (2-t, t-1, t-1, t)^T, \\ (a, c) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): & X = (2-t, 1-t, 1-t, t)^T, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

若 $a^2 + c^2 = \frac{1}{2}$ 且 $a + c \neq 0$, 则无解。

答 3.16 把 $\beta = (1, -1, 1, -1)^T$ 代入第三式, 并利用前两式, 得

$$-\lambda + \mu = 0, \quad \mu - \lambda = 0,$$

故必须有

$$\boxed{\mu = \lambda}.$$

此时系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 \end{pmatrix},$$

其行阶梯形化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

因此导出组的基础解系可取

$$\xi = (-2, 1, -1, 2)^T.$$

方程组通解为

$$X = (1, -1, 1, -1)^T + t(-2, 1, -1, 2)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

再由 $x_2 = x_3$, 得 $-1 + t = 1 - t$, 即 $t = 1$. 所以满足条件的全部解为

$$\boxed{X = (-1, 0, 0, 1)^T}.$$

答 3.17 (1) 记 $B = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ 。矩阵方程 $AX = B$ 有解, 当且仅当每一列 β_j 都可由 A 的列向量线性表示, 即

$$\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(A).$$

这又等价于

$$\text{rank } A = \text{rank}(A, B).$$

(2) 因 A 为 $s \times n$ 且列满秩 n , 线性映射 $A: K^n \rightarrow K^s$ 为单射, 存在线性左逆。取任一左逆 X_0 , 即 $X_0 A = E_n$, 则 $XA = E_n$ 有解, 且全部解为

$$\boxed{X = X_0 + Z(E_s - AX_0)}, \quad Z \in M_{n,s}(K).$$

(3) 并非对任意 $s \times m$ 矩阵 B 都有解。若 B 有解, 则因 $\ker A = \{0\}$, 解唯一。具体地, $AX = B$ 有解当且仅当

$$\text{rank}(A, B) = \text{rank } A = n,$$

此时唯一解为

$$\boxed{X = X_0 B},$$

其中 X_0 是 A 的任一左逆。只有当 A 为可逆方阵 (即 $s = n$) 时, 任意 B 才都有解。

答 3.18 (1) 设 X_0 是 $AX = \beta$ 的一个特解, $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 是 $AX = 0$ 的基础解系。方程组的解空间是仿射空间

$$X_0 + \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{n-r}\}.$$

因此解向量中线性无关向量最多有

$$\boxed{n - r + 1}$$

个。取

$$X_0, \quad X_0 - \xi_1, \quad \dots, \quad X_0 - \xi_{n-r}$$

即可达到这个数目。

(2) 因对任意非零 s 维列向量 β , 方程 $AX = \beta$ 都有解, 所以 $K^s = \text{Col}(A)$ 。于是

$$\boxed{\text{rank } A = s}.$$

答 3.19 有解判别定理. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, β 为 m 维列向量。线性方程组 $AX = \beta$ 有解, 当且仅当

$$\boxed{\text{rank } A = \text{rank}(A, \beta)}.$$

证明. 若 $AX = \beta$ 有解, 则 β 是 A 的列向量组的线性组合, 所以 $\beta \in \text{Col}(A)$, 故增广矩阵与系数矩阵的列空间相同, 秩相等。

反之, 若秩相等, 则 β 属于 A 的列空间, 即存在 X_0 使 $AX_0 = \beta$. 若有解, 设 $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $AX = 0$ 的基础解系, 其中 $r = \text{rank } A$, 则全部解为

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \xi_i, \quad t_i \in F.$$

答 3.20 (1) 见第 3.10 题。

(2) 线性方程组在数域 F 上有解, 当且仅当

$$\text{rank}_F A = \text{rank}_F(A, \beta).$$

矩阵的秩等于其最高阶非零子式的阶数。由于所有元素均在 F 中, 一个子式在 F 中非零当且仅当它在扩域 K 中非零, 因此

$$\text{rank}_F A = \text{rank}_K A, \quad \text{rank}_F(A, \beta) = \text{rank}_K(A, \beta).$$

所以方程组在 F 上有解, 当且仅当其在 K 上有解。

答 3.21 (1) $\beta_1, \dots, \beta_s$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 故

$$\text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_s\} = \{X : AX = 0\}.$$

若 $BX = 0$, 则 X 与每个 β_i 正交, 从而 X 属于 $\{AX = 0\}^\perp$ 。在线性代数基本关系

$$\{AX = 0\}^\perp = \text{Row}(A)$$

下, 存在 $c_1, \dots, c_m$, 使

$$X = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i.$$

(2) $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 当且仅当

$$\ker A = \ker B.$$

取正交补得

$$\text{Row}(A) = \text{Row}(B).$$

这又等价于两组行向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 互相可以线性表示, 即两组向量等价。

答 3.22 (1) 若存在 P 使 $PA = B$, 则 $Ax = 0 \Rightarrow Bx = PAx = 0$, 故 $W_A \subseteq W_B$ 。

反之, 若 $W_A \subseteq W_B$, 则每个满足 $Ax = 0$ 的向量都满足 $Bx = 0$, 即 $\ker A \subseteq \ker B$ 。于是

$$\text{Row}(B) = (\ker B)^\perp \subseteq (\ker A)^\perp = \text{Row}(A).$$

B 的每一行都是 A 的行向量的线性组合, 因此存在矩阵 P , 使

$$PA = B.$$

(2) 由 (1), 只需证明: 当 $W_A = W_B$ 时, 可把 P 选为可逆矩阵. 此时 $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$, 且 $\text{rank } A = \text{rank } B$. 取两组行向量各自的极大无关组, 它们张成同一空间, 故可以选取相同的 r 个行向量作为基. 将这两组基按列组成矩阵, 其线性变换矩阵可逆; 再补足到 m 阶方阵后, 可得到可逆矩阵 P , 使 $PA = B$. 反过来, 若 T 可逆且 $TA = B$, 则 $Ax = 0 \Leftrightarrow TAx = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$, 故 $W_A = W_B$.

答 3.23 记

$$S_j = A_j A_{j+1} \cdots A_m, \quad j = 1, \dots, m.$$

由

$$\text{rank}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \text{rank } A_m$$

及

$$\text{rank}(XA) \leq \text{rank } A$$

可知

$$\text{rank } S_1 \leq \text{rank } S_2 \leq \cdots \leq \text{rank } S_m = \text{rank } A_m = \text{rank } S_1.$$

因此所有 $\text{rank } S_j$ 均相等. 在等式 $S_j = A_j S_{j+1}$ 中, 若 $\ker S_j \neq \ker S_{j+1}$, 由于 $\ker S_{j+1} \subseteq \ker S_j$, 映射 A_j 限制在 $\text{Im } S_{j+1}$ 上不是单射, 从而秩会严格下降, 矛盾. 因此

$$\ker S_j = \ker S_{j+1}.$$

逐次传递得

$$\ker S_j = \ker S_k,$$

即 $S_j x = 0$ 与 $S_k x = 0$ 同解.

答 3.24 所有非对角元 $a_{ij} \in \{\pm 2018, \pm 610\}$ 都是偶数, 而对角元 $a_{ii} = 2019$ 为奇数. 把系数矩阵模 2 化简, 得

$$A \equiv E_n \pmod{2}.$$

因此 $\det A \equiv \det E_n = 1 \pmod{2}$, 特别地 $\det A \neq 0$. 所以该齐次方程组只有零解:

$$\boxed{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}.$$

答 3.25 记 $\xi_1, \dots, \xi_s$ 为 $\ker A$ 的基, $\eta_1, \dots, \eta_t$ 为 $\ker B$ 的基.

(1) $\Rightarrow$ (2): 若存在非零 $x \in \ker A \cap \ker B$, 则 $x = \sum c_i \xi_i$ 且不全为零. 由

$$\sum c_i B \xi_i = Bx = 0$$

知 $B \xi_1, \dots, B \xi_s$ 线性相关.

(2) $\Rightarrow$ (1): 若存在不全为零的 c_i , 使 $\sum c_i B \xi_i = 0$, 令 $x = \sum c_i \xi_i$. 则 $x \neq 0$, 且 $Ax = 0$, $Bx = 0$, 即存在非零公共解.

(1) $\Rightarrow$ (3): 非零公共解 x 可由两组基分别表示为

$$x = \sum c_i \xi_i = \sum d_j \eta_j.$$

其中两组系数都不能全为零, 故

$$\xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_t$$

线性相关。

(3) $\Rightarrow$ (1): 若上述两组基的并集线性相关, 由于每组内部线性无关, 必存在不全为零的 c_i, d_j , 使

$$\sum c_i \xi_i + \sum d_j \eta_j = 0.$$

令 $x = \sum c_i \xi_i = -\sum d_j \eta_j$, 则 $x \neq 0$, 且 $x \in \ker A \cap \ker B$ 。

答 3.26 记 $\text{Col}(A)$ 为 A 的列空间。

情形 (A): $\beta_1, \beta_2 \in \text{Col}(A)$ 。两个方程组都有解。

情形 (B): $\beta_1 \in \text{Col}(A)$, 而 $\beta_2 \notin \text{Col}(A)$ 。

- 方程组 (I) 形如 $Ay + t\beta_1 = \beta_2$ 。无论 t 取何值, $t\beta_1 \in \text{Col}(A)$, 故无解;
- 方程组 (II) 取 $t = 0$, 化为 $Ay = \beta_1$, 故有解。

情形 (C): $\beta_1, \beta_2 \notin \text{Col}(A)$ 。此时不能确定。

- 若在商空间 $F^m / \text{Col}(A)$ 中 β_1, β_2 线性相关, 则存在 $t \neq 0$, 使 $\beta_2 - t\beta_1 \in \text{Col}(A)$, 两个方程都有解;
- 若上述两个剩余类线性无关, 则两个方程都无解。

答 3.27 设

$$\beta = x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3.$$

比较三个分量, 得

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ -y + (a+1)z = 1, \\ 3x + ay + z = b+2. \end{cases}$$

由第二式得 $y = (a+1)z - 1$, 由第一式得 $x = 2 - (a+3)z$ 。代入第三式, 得

$$(a-4)(a+2)z = b+a-4.$$

(1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示, 当且仅当

$$\boxed{a = -2, b \neq 6} \quad \text{或} \quad \boxed{a = 4, b \neq 0}.$$

(2) 表达式不唯一的情形为

$$\boxed{(a, b) = (-2, 6)} \quad \text{或} \quad \boxed{(a, b) = (4, 0)}.$$

对应全部表达式分别为

$$\begin{aligned} (-2, 6): \quad \beta &= (2-t)\alpha_1 + (-t-1)\alpha_2 + t\alpha_3, \\ (4, 0): \quad \beta &= (2-7t)\alpha_1 + (5t-1)\alpha_2 + t\alpha_3, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}.$$

答 3.28 记

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

计算得

$$\det A = -(a-1)^2(a+2), \quad \det B = (a-4)(a+2).$$

逐项讨论:

- $a \neq -2, 4$ 时, A 可逆。于是 β 的每一列都可由 A 的列表示, 但 B 也可逆, 从而 α 组也能由 β 组表示, 不符合题意;
- $a = 1$ 或 $a = -2$ 时, $\text{rank}(A, B) > \text{rank} A$, 故 β 组不能全由 α 组表示;
- $a = 4$ 时, A 可逆, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示; 而 $\text{rank} B = 2 < 3$, 所以 α 组不能全由 β 组表示。

因此

$$\boxed{a = 4}.$$

答 3.29 以 α_i, β_i 为列作矩阵, 计算得

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -(a-1)(a+1),$$

$$\det(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2(a-1)(a+1).$$

当 $a \neq \pm 1$ 时, 两组向量都张成 $\mathbb{R}^3$, 故等价。当 $a = 1$ 时, 两组秩均为 2, 且并组秩为 2, 故等价。当 $a = -1$ 时, 两组秩均为 2, 但并组秩为 3, 故不等价。因此

$$\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}.$$

并且

$$\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \quad (a \neq \pm 1),$$

而

$$\beta_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_3 \quad (a = 1).$$

答 3.30 (1) 对 A 作初等行变换:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

故 $\text{rank } A = 3$, 且

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

是 $AX = 0$ 的一个基础解系。

(2) 设 $AB = E_3$, 则 B 的三列分别都是对应非齐次方程组的解。由行阶梯形可写出

$$B = \begin{bmatrix} 2-u & 6-v & -1-w \\ 2u-1 & 2v-3 & 2w+1 \\ 3u-1 & 3v-4 & 3w+1 \\ u & v & w \end{bmatrix}, \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

答 3.31 设

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

计算

$$AC - CA = \begin{pmatrix} (a-1)z & y+aw-ax \\ x-z-w & y-az \end{pmatrix}.$$

令其等于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 按参数讨论:

- 若 $a \neq 0, 1$, 对任意 b , 解存在:

$$z = 0, \quad y = b, \quad x = \frac{b-1}{a}, \quad w = \frac{b-1-a}{a}.$$

- 若 $a = 0$, 解存在当且仅当 $b = 1$, 全部解为

$$C = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in F.$$

- 若 $a = 1$, 解存在当且仅当 $b = 2$, 全部解为

$$C = \begin{pmatrix} u+v+1 & u+2 \\ u & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in F.$$

答 3.32 (1) 若 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 是解, 则三次多项式

$$f(t) = t^3 - x_3 t^2 - x_2 t - x_1$$

满足

$$f(a_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不同, 则 $f(t)$ 有四个不同的根。但 $f(t)$ 是三次多项式且首项系数为 1, 不可能有四个不同的根, 矛盾。因此方程组无解。

(2) 将 $a_1 = a_3 = k$, $a_2 = a_4 = -k$ 代入, 只需考虑

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3. \end{cases}$$

两式相减得 $x_2 = k^2$. 代回得

$$x_1 + k^2x_3 = 0.$$

故当 $k \neq 0$ 时通解为

$$X = (-k^2t, k^2, t)^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

又 $\beta = (-1, 1, 1)^T$ 是解, 故 $k^2 = 1$. 所以

$$\boxed{k = \pm 1}, \quad \boxed{X = (-t, 1, t)^T}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

答 3.33 若两个方程都有解, 则 β_1, β_2 都属于 $\text{Col}(A)$, 所以

$$\text{Col}(A, \beta_1, \beta_2) = \text{Col}(A),$$

从而 $\text{rank } A = \text{rank}(A, \beta_1, \beta_2)$.

反之, 若秩相等, 则加入 β_1, β_2 后列空间没有扩大, 故

$$\beta_1, \beta_2 \in \text{Col}(A).$$

于是两个方程都有解。

答 3.34 设

$$U = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}, \quad V = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_t\}.$$

两个子空间的和的维数为

$$\dim(U + V) = r_3.$$

一方面,

$$r_3 \geq \max\{\dim U, \dim V\} = \max\{r_1, r_2\}.$$

另一方面,

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \leq r_1 + r_2.$$

因此

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2.$$

答 3.35 (1) 分块矩阵 $C = (A, B)$ 的列空间满足

$$\text{Col}(C) = \text{Col}(A) + \text{Col}(B).$$

于是

$$\max\{r_1, r_2\} \leq \dim \text{Col}(C) = r \leq r_1 + r_2.$$

(2) $AX = B$ 有解, 当且仅当 $\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(A)$, 亦即

$$\text{Col}(C) = \text{Col}(A).$$

取维数即得 $r = r_1$ 。反之, 若 $r = r_1$, 则由 $\text{Col}(A) \subseteq \text{Col}(C)$ 且维数相等, 得 $\text{Col}(C) = \text{Col}(A)$, 故 $\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(A)$, 即 $AX = B$ 有解。

(3) 由

$$\ker A^T = (\text{Col } A)^\perp, \quad \ker C^T = (\text{Col } C)^\perp$$

可知 $A^TY = 0$ 与 $C^TY = 0$ 同解, 当且仅当

$$\text{Col } A = \text{Col } C.$$

再与 (2) 比较, 等价于 $AX = B$ 有解。

答 3.36 记

$$R_i = \sum_{k \neq i} |a_{ik}|.$$

假设 $\det A = 0$, 则存在非零列向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, 使 $Ax = 0$ 。将各分量按绝对值从大到小重新编号, 使

$$|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_n|.$$

由第 1 个方程得

$$|a_{11}||x_1| \leq R_1|x_2|.$$

由第 2 个方程得

$$|a_{22}||x_2| \leq R_2|x_1|.$$

两式相乘, 得

$$|a_{11}a_{22}||x_1x_2| \leq R_1R_2|x_1x_2|.$$

由于 $x \neq 0$, 且 $|x_1| \geq |x_2|$, 上式中 $|x_1x_2| > 0$, 故

$$|a_{11}a_{22}| \leq R_1R_2,$$

与题设 $i = 1, j = 2$ 时的严格不等式矛盾。因此 $\det A \neq 0$ 。

答 3.37 因 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 线性表示,

$$\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \leq \text{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_s\} \leq s < r.$$

含有 r 个向量的向量组的秩小于 r , 所以该向量组线性相关。

答 3.38 (1) 前三个方程中, 第三行等于第一行的 -1 倍加上第二行的 2 倍, 故由前三个方程组成的系数矩阵秩为 2 。加入第四个方程后, 系数矩阵 A 的秩不超过 4 , 且至少为 2 。

若 $AX = b$ 有三个线性无关的解, 则它们的差向量中可得到两个线性无关的齐次方程组的解。因此 $\dim \ker A \geq 2$, 从而

$$\operatorname{rank} A = 4 - \dim \ker A \leq 2.$$

于是

$$\boxed{\operatorname{rank} A = 2}.$$

(2) 记第四行系数向量为 $(a, 1, 5, b)$ 。它必须属于前三行张成的空间, 即存在 u, v , 使

$$(a, 1, 5, b) = u(1, 1, 1, 1) + v(3, 2, 4, -1).$$

由第二、三分量得

$$u + 2v = 1, \quad u + 4v = 5,$$

故 $v = 2, u = -3$ 。于是

$$\boxed{a = 3, \quad b = -5}.$$

此时第四个方程也恰与前三式相容。

(3) 方程等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

取 $x_3 = s, x_4 = t$, 解得

$$x_1 = 2 - 2s + 3t, \quad x_2 = -3 + s - 4t.$$

因此通解为

$$\boxed{X = (2, -3, 0, 0)^T + s(-2, 1, 1, 0)^T + t(3, -4, 0, 1)^T}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

答 3.39 令

$$A = E_n + \frac{(\beta - \alpha)\alpha^T}{\alpha^T \alpha}.$$

这是一个 n 阶方阵, 且

$$A\alpha = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)(\alpha^T \alpha)}{\alpha^T \alpha} = \beta.$$

若 $\alpha^T X = 0$, 则

$$AX = X + \frac{(\beta - \alpha)(\alpha^T X)}{\alpha^T \alpha} = X.$$

所以该矩阵满足题目两个条件。

答 3.40 (1) 按第一行展开并整理, 得

$$\boxed{\det A = (af + bg + ch)^2}.$$

(2) 计算特征多项式

$$\begin{aligned} \det(\lambda E_4 + A) &= \lambda^4 + \lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \\ &\quad + (af + bg + ch)^2. \end{aligned}$$

右端为若干实平方项之和, 故它等于零当且仅当

$$\lambda = 0 \quad \text{且} \quad af + bg + ch = 0.$$

齐次方程 $(\lambda E_4 + A)x = 0$ 有非零解, 当且仅当 $\det(\lambda E_4 + A) = 0$, 于是结论成立。

答 3.41 若 $AX = b$, 左乘 AB 得

$$ABb = ABAX = AX = b.$$

反之, 若 $ABb = b$, 取 $X = Bb$, 便得到 $AX = ABb = b$, 故有解。

当有解时, $X = Bb + (E_n - BA)Y$ 显然满足

$$AX = ABb + A(E_n - BA)Y = ABb + A(E_n - BA)Y.$$

由 $ABA = A$ 得 $A(E_n - BA) = A - ABA = 0$, 故它确为解。

反之, 若 $AX = b$, 取 $Y = X$, 则

$$Bb + (E_n - BA)X = B(AX) + X - BAX = BAX + X - BAX = X.$$

所以其通解就是题中形式。

答 3.42 记第 i 个平面的法向量为 $\mathbf{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$, 齐次系数矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}.$$

(1) 四个平面围成四面体, 当且仅当:

- $\det M \neq 0$;
- 任意三个平面的法向量线性无关, 即删去任一平面后所得的 3×3 法向量行列式

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}).$$

前者保证四个平面不共点; 后者保证任意三个平面相交于唯一一点, 从而形成四个互异的顶点。

(2) 设 Δ_i 如上。四面体体积为

$$V = \frac{|\det M|^3}{6 \prod_{i=1}^4 |\Delta_i|}.$$

该式来自齐次顶点坐标矩阵的绝对值行列式除以 $3!$, 量纲与平面方程中各系数的统一缩放无关。

答 3.43 若 $(A - E)x = 0$, 则 $Ax = x$, 从而

$$(A^2 - E)x = A^2x - x = x - x = 0.$$

同理, $(A + E)x = 0$ 的解也满足 $(A^2 - E)x = 0$ 。故两组向量合起来都属于 $\ker(A^2 - E)$ 。

又

$$(A^2 - E) = (A - E)(A + E).$$

若 $x \in \ker(A^2 - E)$, 令 $y = (A + E)x$ 。则 $(A - E)y = 0$, 即 $y \in \ker(A - E)$ 。在 $\ker(A + E)$ 上, $A = -E$, 所以 $A - E = -2E$ 可逆。取唯一的 $z \in \ker(A + E)$ 使 $(A - E)z = y$, 则 $x - z \in \ker(A - E)$, 于是

$$\ker(A^2 - E) = \ker(A - E) \oplus \ker(A + E).$$

因此 $\xi_1, \dots, \xi_s$ 与 $\beta_1, \dots, \beta_t$ 的并集线性无关, 并且张成 $\ker(A^2 - E)$, 给出该解空间的一组基。